வகை வடிவகணிதம்

ஆசிரியர்
கே. ஆர். இராஜகோபாலன், பி.எஸ்ஸி. (ஹானர்ஸ்),
புள்ளியியல் துறைப் பேராசிரியர்
சென்னைக் கிறித்துவக் கல்லூரி,
தாம்பரம், சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த.பா நி (க.வெ.) வரிசை எண்—338

வகை வடிவகணிதம்

ஆசிரியர்
கே. ஆர். இராஜகோபாலன், பி.எஸ்ஸி. (ஹானர்ஸ்),
புள்ளியியல் துறைப் பேராசிரியர்
சென்னைக் கிறித்துவக் கல்லூரி,
தாம்பரம், சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—July, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 338

DIFFERENTIAL GEOMETRY

K. R. RAJAGOPALAN

Price Rs. 7-10

'Published by The Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi'.

Printed by
Muthukumaran Press,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. அவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'வகை வடிவகணிதம்'** என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **338**ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **373** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. தொடுகோடுகளும், செங்கோடுகளும்

(TANGENTS AND NORMALS)

§1·1. அறிமுகம்

வகை கணிதத்தையும், வடிவ கணிதத்தையும் ஒன்ருகச் சேர்த்து நோக்கும் கணக்கு முறைகளுக்கு **வகை வடிவகணிதம்** என்று பெயர்.

§1·2. P புள்ளியிலுள்ள தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$y=f(x)$ என்பதற்கான வளைகோட்டினை வரைவோம். $P(x_1, y_1)$ என்பது அதன் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். அந்த புள்ளியிலிருந்து வளைகோட்டிற்கு ஒரு தொடுகோடு வரைந்து அதன் சமன்பாட்டினைக் காண வேண்டும்.

அத் தொடுகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் (Slope) $\frac{dy}{dx}$ என்பதற்குச் சமம் (இந்தக் கெழுவில் $x = x_1, y = y_1$ என்று பொருத்திய பிறகு). மற்றும் அந்தக்கோடு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியினூடே செல்கிறது. எனவே அதன் சமன்பாடு

$$(y - y_1) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{11} (x - x_1) \text{ ஆகும்.} \qquad \ldots (1)$$

இந்த $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{11}$ என்ற குறி, வகையீட்டுக் கெழுவின் மதிப்பை $x = x_1, y = y_1$ என்று பொருத்திக் காணவேண்டும் என்பதைக் குறிக்கும்.

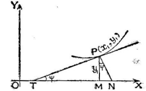
§ 1·3 P புள்ளியிலுள்ள செங்குத்துக்கோட்டின் (normal) சமன்பாடு

தொடுகோட்டிற்கு P-ல் செங்குத்தான ஒரு கோடு வரைந்தால். அதனைச் செங்குத்துக்கோடு அல்லது "செங்கோடு" என்போம். அதன் சாய்வு விகிதம் $\{ -1 \mid (dy \mid dx) \}$ எனவே,

$$(y-y_1) = \{ -1 \mid (dy-dx)_{11} \} (x-x_1) \quad \cdots \quad (2)$$

என்பது செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும்.

§ 1·4 தொடுகோட்டடி, செங்கோட்டடி. தொடுகோட்டின் நீளம் செங்கோட்டின் நீளம் (Subtangent, Subnormal, Tangent and Normal)



படம். 1·1

ஒரு வளைகோட்டிற்கு P என்ற புள்ளியில் PT என்ற தொடு கோட்டையும், PN என்ற செங்குத்துக் கோட்டையும் வரைவோம். அவை x அச்சை முறையே T, N என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். (படம் 1·1 பார்க்க) PM என்பது Ox-ற்கு P-யிலிருந்து வரையப் பட்ட குத்துக்கோடு.

அப்பொழுது TM என்பது **தொடுகோட்டடி** என்றும், MN என்பது **செங்கோட்டடி** என்றும்கூறுவோம். PT என்பது OX உடன் ψ என்ற கோணத்தை உடையதானல் $\triangle PTM$ என்ற முக் கோணத்திலிருந்து,

$$\tan \psi = \frac{MP}{MT} \cdot \text{ ஆனுல் } \tan \psi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{11}. \text{ எனவே,}$$

$$\text{தொடுகோட்டடி} = TM = \frac{y_1}{(dy \mid dx)_{11}} \quad \cdots \quad (3)$$

PMN என்ற முக்கோணத்திலிருந்து,

$\tan \psi = \frac{MN}{MP}$. எனவே,

$$\text{செங்கோட்டடி} = MN = y_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_{11} \quad \dots (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y' \text{ என்றால், தொடுகோட்டடி} = y/y' \\ \text{செங்கோட்டடி} = yy' \end{array}\right\} \quad \dots (5)$$

இரு சமன் பாட்டிலும் $x = x_1$, $y = y_1$ என்ற மதிப்புகளைப் பொருத்த வேண்டும் என்பதை மறக்கக் கூடாது,

$$\text{தொடுகோட்டின் நீளம்} = PT = \sqrt{PM^2 + TM^2}$$

$$= \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y^1}\right)^2} \quad \dots (6)$$

$$\text{செங்கோட்டின் நீளம்} = PN = \sqrt{PM^2 + MN^2}$$

$$= \sqrt{y^2 + (yy^1)^2} \quad \dots (7)$$

§ 1·5 இரண்டு வளைகோட்டிற்கிடையே உள்ள கோணம்.

இரண்டு வளைகோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் பொழுது, அந்த வெட்டும் புள்ளியில் இரண்டு வளைகோடுகளுக்கும் தொடுகோடுகள் காணலாம். இவ்விரு தொடுகோடுகளிடையே உள்ள கோணத்தை நாம், அவ்விரு வளைகோடுகளிடையே உள்ள கோணமாக வரையறுக்கிறோம்.

$y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$ என்பது இரு வளைகோடுகளானால், முதல் வளைகோட்டிற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= f'_1$

இரண்டாம் வளைகோட்டிற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= f_2'$.

எனவே, இரண்டினிடையே உள்ள கோணம்

$$= \tan^{-1} \left[\frac{f_1' - f_2'}{1 + f_1' f_2'}\right] \text{ ஆகும்} \quad \dots (8)$$

இங்கும் f_1', f_2' இரண்டின் மதிப்பையும், **புள்ளியின் கூறுகளைப்** பொருத்திக் கணக்கிட வேண்டும்.

துணைமுடிவு 1.

இரண்டு வளைகோட்டின் சமன்பாடுகளும் $f(x, y) = 0$ மற்றும் $\phi(x, y) = 0$ என்று இருக்குமானால், $\frac{dy}{dx}$ ஐப் பகுதி வகையீட்டு முறையில் கணக்கிட வேண்டும்.

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0 \text{ என்று வரும்.}$$

எனவே,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y};$$

இரண்டாம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y} \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே,

$$\text{வெட்டுக் கோணம்} = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{f_x}{f_y} - \frac{\phi_x}{\phi_y}}{1 + \frac{f_x}{f_y}\cdot\frac{\phi_x}{\phi_y}}\right|$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{f_x\,\phi_y - \phi_x\,f_y}{f_x\,\phi_x + f_y\,\phi_y}\right] \qquad -(9)$$

து. மு. 2.

இரண்டு வளைகோடுகளும் ஒன்றையொன்று தொடுமானால் அவைகளிடையே உள்ள கோணம் $0°$ ஆகும்.

எனவே இரண்டு வளைகோடுகள் தொடுவதற்கான நிபந்தனை : $f_1' = f_2'$ அல்லது $f_x\,\phi_y = f_y\,\phi_x$ — (10)

து. மு. 3.

இரண்டு வளைகோடுகளும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டினால், இக்கோணம் $\frac{\pi}{2}$ என்றாகும். ஆக இதற்கான நிபந்தனை $1 + f_1' f_2' = 0$ அல்லது $f_x\,\phi_x + f_y\,\phi_y = 0$ ஆகும். — (11)

எடுத்துக்காட்டுகள்

எ. கா. 1.

$y = 16x^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $P(1, 16)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு, செங்கோடு இவைகளின் சமன்பாடுகள், தொடு கோட்டடி, செங்கோட்டடி, இவற்றைக் கண்டுபிடி.

$y = 16x^2$.

$y' = \frac{yd}{dx} = 32x$; $x = 1$ எனப் பிரதியிட

$(y')_{11} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{11} = 32$.

ஆகவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - 16) = 32(x - 1)$$

அல்லது $y - 32x + 16 = 0$ என்றாகும்.

செங்கோட்டின் சமன்பாடு $(y - 16) = \left(\frac{-1}{32}\right)(x - 1)$

அல்லது $32y + x - 513 = 0$ என்றாகும்.

தொடுகோட்டடி $= \frac{y}{y'} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

செங்கோட்டடி $= yy^1 = 16 \times 32 = 512$

எ. கா. 2.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $x = a\cos\frac{\pi}{4}$, $y = b\sin\frac{\pi}{4}$, என்ற புள்ளியில் மேற்கூறியவற்றைக் கணக்கிட்டு தொடுகோட்டடியையும், செங்கோட்டடியையும் பெருக்கினால் $\frac{b^2}{2}$ என்ற மதிப்பு வரும் என்பதைக் காண்க.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்பது வளைகோடு

இதில் $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ என்று பொருத்தினால் சரியாக இருக்கிறது. இந்த வளைகோடு ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும் x-ம், y-ம் மற்றொரு மாறியான θ என்பதனையொட்டி அமைந்துள்ளதைக் காணலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்பதாகும்.

எனவே $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)} = \dfrac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}$

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ என்று பிரதியிட்டால் $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}$ ஆகும்.

ஆக, தொடுகோடு சமன்பாடு,

$$y - b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{-b}{a}\left(x - a\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

அதாவது $a\left(y - \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right) + b\left(x - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right) = 0$ என்றாகும்.

செங்கோடு: $y - \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{b}\left(x - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ அல்லது

$$b\left(y - \frac{b}{\sqrt{2}}\right) - a\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

செங்கோட்டடி $= yy' = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{-b}{a}\right) = \dfrac{-b^2}{a\sqrt{2}}$

தொடுகோட்டடி $= \dfrac{y}{y'} = \dfrac{\dfrac{b}{\sqrt{2}}}{\dfrac{-b}{a}} = \dfrac{-a}{\sqrt{2}}$

இரண்டையும் பெருக்கினால் $\dfrac{b^2}{2}$ என்று வருகிறது.

எ. கா. 3.

$x^2 + y^2 + ax + by = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $(0,0)$ என்ற புள்ளியில் தொடு கோடு சமன்பாடு, செங்கோடு சமன்பாடுகளைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை x-ஐ வைத்து வகையிட

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + a + b\frac{dy}{dx} = 0$$

அல்லது $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + a}{2y + b}$. (0, 0) என்ற புள்ளியில் $-\frac{a}{b}$ என்று வருகிறது.

தொடுகோடு சமன்பாடு $(y - 0) = \frac{-a}{b}(x - 0)$

அல்லது $by + ax = 0$

செங்கோடு சமன்பாடு, $ay - bx = 0$ என்று வரும்.

எ. கா. 4.

$\theta = \frac{\pi}{4}$ என்ற புள்ளியிலுள்ள $y = 3 \sin\theta - \sin^2\theta$, $x = 3\cos\theta - \cos^2\theta$ என்ற வளைகோட்டின் செங்கோடானது, ஆதி (Origin) யினூடே செல்கிறது எனக் காண்க.

$$y = 3\sin\theta - \sin^2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta$$

$$x = 3\cos\theta - \cos^2\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta$$

இரண்டின் மதிப்பையும் $\theta = \frac{\pi}{4}$ என பொருத்திக் காண்போம்.

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)_{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}};$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)_{\frac{\pi}{4}} = \frac{-3}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{-3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

எனவே $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - \sqrt{2}}{-3 + \sqrt{2}} = -1$ மற்றும் $\frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = +1$ என் றுகிறது.

$\theta = \frac{\pi}{4}$ எனும் பொழுது $x = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}$,

$y = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}$ என்றாகிறது.

ஆகவே செங்கோட்டுச் சமன்பாடு

$$y - \left(\frac{3\sqrt{2}-1}{2}\right) = x - \left(\frac{3\sqrt{2}-1}{2}\right) \text{ அல்லது } y = x$$

இது ஆதியினூடே செல்கிறது என்பது தெளிவு.

எ. கா. 5.

$x^m y^n = a^m$ என்ற வளைகோட்டிற்கு (a, a) என்ற புள்ளியில் கீழ்க்கண்டவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும். (i) தொடுகோட்டின் நீளம், (ii) செங்கோட்டின் நீளம் (iii) தொடுகோட்டடி (iv) செங்கோட்டடி

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை x-ஐ வைத்து வகையெடுக்க,

$$x^m (ny^{n-1} \cdot y_1) + mx^{m-1} y^n = 0$$

$$\text{அல்லது } \quad y' = -\frac{mx^{m-1} y^n}{nx^m y^{n-1}} = -\frac{m}{n}\frac{y}{x}$$

கொடுக்கப்பட்ட (a, a) என்ற புள்ளியில், $y' = -\frac{m}{n}$.

$$\text{தொடுகோட்டின் நீளம்} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + \left(\frac{-an}{m}\right)^2} = a\sqrt{1 + m^2}$$

$$\text{செங்கோட்டின் நீளம்} = \sqrt{y^2 + y^2 y'^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2\frac{m^2}{n^2}} = a\sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}}$$

$$\text{தொடு கோட்டடி} = \frac{y}{y'} = \frac{an}{m}\text{; செங்கோட்டடி} = \frac{am}{n}.$$

[நீளத்தை மட்டுமே குறிப்பதால் — குறியின் அவசியமில்லை]

எ. கா. 6.

$y^2 = 4ax$ மற்றும் $x = \dfrac{8a^3}{y^2 + 4a^2}$ என்ற இரு வளைகோடு களும் வெட்டும் கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

முதலில் அவ்விரண்டு வளைகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளிகளைக் கணிப்போம். இரண்டாம் சமன்பாட்டிலிருந்து முதல் சமன் பாட்டில் x-ன் மதிப்பைப் பொருத்த,

$$y^2 = 4a\left(\frac{8a^3}{y^2 + 4a^2}\right)$$

$$\therefore\ y^2(y^2 + 4a^2) = 32a^4$$

அல்லது $y^4 + 4a^2y^2 - 32a^4 = 0$ என்று ஆகும்.

எனவே $(y^2 + 8a^2)(y^2 - 4a^2) = 0$ அல்லது $y = \pm 2a$ என்றாகிறது. இந்த y-ன் மதிப்பை முதல் சமன்பாட்டில் பொருத்த $x = a$ என்றாகிறது.

ஆக இவ்விரண்டு வளைகோடுகளும் $(a, 2a)$ மற்றும் $(a, -2a)$ என்ற இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

$(a, 2a)$ என்ற புள்ளியில்

முதல் வளைகோட்டில் $2y\dfrac{dy}{dx} = 4a\,;\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{y} = 1$

$(a, 2a)$ என்ற புள்ளியில்

இரண்டாம் வளைகோட்டில், $y^2 + 4a^2 = \dfrac{8a^3}{x}$

$$2y\frac{dy}{dx} = -\frac{8a^3}{x^2}\,;\ \therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{4a^3}{x^2y} = -2 \left[\begin{array}{l}(a, 2a) \text{ என்ற} \\ \text{புள்ளியில்)}\end{array}\right.$$

எனவே வெட்டுங்கோணம் $\tan^{-1}\left(\dfrac{1+2}{1-2}\right) = \tan^{-1}(-3)$

$(a, -2a)$ என்ற புள்ளியில், முன்போலவே கணக்கிட

$\dfrac{dy}{dx} = -1$ முதல் வளைகோட்டில்

$\dfrac{dy}{dx} = +2$ இரண்டாம் வளைகோட்டில்

எனவே வெட்டுங்கோணம் $= \tan^{-1}\left(\dfrac{-1-2}{1-2}\right)$

$$= \tan^{-1}(+3)$$

அதாவது கோணம் 90°ஐ-விட அதிகமாகவும், 180°ஐ-விடக் குறைவாகவும் இருக்கும். குறுங்கோணத்தை மட்டும் கணக் கிட்டால், இரண்டு புள்ளிகளிலும் வெட்டுங்கோணம் $\tan^{-1}(3)$ ஆகிறது.

எ. கா. 7.

கீழ்கண்ட வளைகோடுகள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என்று நிரூபிக்க. $y = x^3 - 3x^2 - 8x - 4$; $y = 3x^2 + 7x + 4$. மற்றும் அந்த புள்ளியில் பொதுவான தொடுகோட்டின் சமன் பாட்டைக் கண்டுபிடி.

y-ன் இரு மதிப்புக்களையும் சமமாக்கினால்

$$x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 3x^2 + 7x + 4$$

$$x^3 - 6x^2 - 15x - 8 = 0.$$

$$(x+1)^2 (x-8) = 0.$$

ஆக x-ன் மதிப்பு -1 அல்லது 8 ஆகிறது.

இம்மதிப்பை முதல் வளைகோட்டில் பொருத்தினால்,

$$y = -1 - 3 + 8 - 4 = 0; \ (x = -1).$$

$$y = 512 - 192 - 64 - 4 = 252; \ (x = 8).$$

(இதே மதிப்புக்களை இரண்டாம் சமன்பாட்டில் பொருத்தினாலும் சரியாக உள்ளது என்பதைக் காண்க). ஆக, இரண்டு வளைக் கோடுகளும் $(-1, 0)$ மற்றும் $(8, 252)$ என்ற இருபுள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. இப்பொழுது இரு வளைகோடுகளின் சாய்வு விகிதங்களை கணிப்போம்.

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து $f_1' = \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 8$

$x = 1$ என்னும் பொழுது $f_1' = 1$.

$x = 8$ என்ற மதிப்புள்ள பொழுது $f_1' = 136$.

இரண்டாம் வளைகோடு: $f_2' = \dfrac{dy}{dx} = 6x + 7$

$x = -1$ என்றால் $f_2' = 1$.

$x = 8$ என்றால் $f_2' = 55$.

எனவே $(-1, 0)$ என்ற புள்ளியில், இருவளைகோடுகளின் சாய்வு விகிதங்களும் சமம். ஆகவே அவைகள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன.

இப்பொழுது இவ்விரண்டு வளைகோடுகளில் ஏதாவது ஒன்றுக்குத் தொடுகோடினைக் கண்டால் அதுதான் பொதுவான தொடுகோடாகும்.

இரண்டாம் வளைகோட்டை எடுத்துக்கொண்டால்,

$y - 0 = 1\ (x + 1)$ அல்லது $y - x - 1 = 0$ என்பதே பொதுத் தொடுகோடு.

பின்குறிப்பு மற்றுமொரு வெட்டுப்புள்ளியான $(8,252)$, ல் இவ்விரண்டு வளைகோடுகளும் தொடுவதில்லை. அவைகளிடையே

உள்ள கோணம் $= \tan^{-1}\left(\dfrac{136-55}{1+136 \times 55}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{81}{7481}\right)$

எ. கா. 8.

$x^2 - y^2 = 5$ என்ற அதிபரவளைவும் (Hyperbola) $4x^2 + 9y^2 = 72$ என்ற நீள்வட்டமும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன என்று காண்பி.

இரண்டு சமன்பாடுகளையும் $f(x, y) = x^2 - y^2 - 5 = 0$.

$\phi(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 72 = 0$ என்று எழுதுவோம்.

சூத்திரம் (11)-ன்படி, செங்குத்தாக வெட்டுவதற்கு

$f_x \cdot \phi_x + f_y \cdot \phi_y = 0$ என்றாக வேண்டும்.

இங்கு $f_x = 2x;\ f_y = -2y$.

$\phi_x = 8x;\ \phi_y = 18y$.

எனவே $f_x\, \phi_x + f_y\, \phi_y = 16x^2 - 36y^2$

இப்பொழுது இருவளை கோடுகளும் எங்கு வெட்டுகின்றன என்று பார்ப்போம்.

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து $x^2 = 5 + y^2$ என்பதை இரண்டாம் சமன்பாட்டில் பொருத்த $4(5 + y^2) + 9y^2 = 72$ என்றாகிறது.

அதாவது $13y^2 = 52$ அல்லது $y = \pm 2$

எனவே $x^2 = 9$ அல்லது $x = \pm 3$

ஆக இரண்டு வளைகோடுகளும் $(\pm 3, \pm 2)$ என்ற நான்கு புள்ளிகளில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன.

இவையெல்லாவற்றிலும் $f_x\ \phi_x + f_y\ \phi_y = 16x^2 - 36y^2 = 144 - 144 = 0$ என்றுகிறது. ஆகவே இரண்டும் செங்குத்தாகவே (நான்கு வெட்டும் புள்ளிகளிலும்) வெட்டுகின்றன.

எ. கா. 9.

$x^2 + y^2 = 8ax$ என்கிற வட்டமும் $(2a - x)y^2 = x^3$ என்கிற ஸிஸ்ஸாய்ட் (cissoid) வளைகோடும் ஒன்றையொன்று ஆதியில் செங்குத்தாகவும், மற்ற வெட்டுப் புள்ளிகளில் 45° கோணங்களிலும் வெட்டுகின்றன என்று நிரூபி.

முதல் சமன்பாட்டில் உள்ள y^2-ன் மதிப்பை இரண்டாம் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$(2a - x)(8ax - x^2) = x^3$ என்றுகிறது.

இச்சமன்பாட்டில் x-ன் மதிப்பு 0 அல்லது $\frac{8a}{5}$ என்றுகிறது. இம் மதிப்பை முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$y^2 = \frac{256a^2}{25}$ அல்லது $y = \pm\frac{16a}{5}$ என்று வருகிறது.

எனவே, $(0, 0)$, $\left(\frac{8a}{5}, \frac{16a}{5}\right)$, $\left(\frac{8a}{5}, \frac{-16a}{5}\right)$ என மூன்று வெட்டுப்புள்ளிகள் உள்ளன.

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 8ax = 0$ $\phi(x, y) = (2a - x)\ y^2 - x^3 = 0$

$f_x = 2x - 8a$ $\phi_x = -y^2 - 3x^2$

$f_y = 2y$ $\phi_y = 2y\ (2a - x)$

$(0, 0)$ என்ற ஆதியில்,

$f_x = -8a\ ;\ f_y = 0\ ;\ \phi_x = 0;\ \phi_y = 0$

எனவே $f_x\ \phi_x + f_y\ \phi_y = 0$ ஆக இரு வளைகோடுகளும் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன.

$\left(\frac{8a}{5}, \frac{16a}{5}\right)$ என்ற புள்ளியில்

$f_x = \frac{-24a}{5}\ ;\ f_y = \frac{32a}{5}\ ;\quad \phi_x = \frac{-448a^2}{25}\ ;\ \phi_y = \frac{64a^2}{250}$

வெட்டும் கோணம் $= \tan^{-1}\left[\frac{f_x \cdot \phi_y - f_y \cdot \phi_x}{f_x\ \phi_x + f_y \cdot \phi_y}\right]$

$$= \tan^{-1} \left\{ \frac{\frac{-24 \times 64a^3}{125} + \frac{32 \times 448a^3}{125}}{\frac{24 \times 448a^3}{125} + \frac{32 \times 64a^3}{125}} \right\} = \tan^{-1}\ (1)\ = 45^\circ$$

$\left(\frac{8a}{5}, \frac{-16a}{5}\right)$ என்கிற புள்ளியில்

$$f_x = \frac{+24a}{5}\ ;\ f_y = \frac{-32a}{5}\ ;\ \phi_x = \frac{-448a^2}{25}\ ;\ \phi_y = \frac{-64a^2}{25}$$

வெட்டும் கோணம் $= \tan^{-1}(1) = 45^\circ$

எ. கா. 10.

ஒரு வளைகோட்டின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் அச்சுதூரங்கள் (coordinates) $x = \log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + \cos\theta$; $y = \sin\theta$ என்றுள்ளன. தொடுகோட்டிற்கும், செங்கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள நீளமும், தொடுகோட்டடியின் நீளமும் எதிர்விகிதத்தில் உள்ளன என்று காண்பி.

$$\text{இங்கு } y' = \frac{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)} = \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} \cdot \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} - \sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta}$$

$$= \tan\theta$$

தொடுகோட்டடி $= \dfrac{y}{y'} = \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} = \cos\theta$ ஆகிறது.

தொடுகோட்டிற்கும், செங்கோடிற்கும் இடையே உள்ள தூரம் = தொடுகோட்டடி + செங்கோட்டடி (படம் 1·1)

$$= \frac{y}{y'} + yy' = \cos\theta + (\sin\theta)(\tan\theta) = \frac{1}{\cos\theta}$$

எனவே இவ்விரண்டும் எதிர்விகிதத்தில் உள்ளன.

பயிற்சிகள்

கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குக் குறித்த புள்ளிகளில் தொடுகோடு, செங்கோடுகளைக் கண்டுபிடி.

1. (a) $y = x^3 - 3x$; $(2, 2)$ல் (b) $y = \dfrac{1}{x+1}$ $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ல்

2. (a) $y = \frac{2x+1}{3-x}$; (2, 5)ல் (b) $y = 2x - x^3$, சாய்வு விகிதம் $m = -1$ ஆனால்

3. $y^2 = 4ax$; $(at^2, 2at)$ ல்

4. $x^2 + 5y^2 = 14$; $y = 1$ ல்

5. $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$; (2, — 2) ல்

6. $y = 5x^2 (1 + x^2)^{-1}$; $x = 2$ ல்

7. $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$; (x_1, y_1) ல்

8. $ay = x^2$; (a, a) ல்

9. $x^2 - 4y^2 = 9$; (5, 2) ல்

10. $y^2 + 2y - 4x + 4 = 0$; (1, — 2) ல்

11. $x^2 + y^2 + ax + by = 0$; ஆதியில்

12. $x^2 + y^2 = r^2$; (x_1, y_1) ல்

13. $y^2 = \frac{x^3}{(2a - x)}$; (a, a) ல்

கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்கு, குறித்த புள்ளிகளில் தொடு கோட்டடி செங்கோட்டடி இரண்டையும் கண்டுபிடி.

14. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$; (2, —1) ல்

15. $\left.\begin{array}{l} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{array}\right\}$; $\theta = \frac{\pi}{3}$ ல்

16. $y = c \cos\frac{x}{c}$; ஏதாவதொரு புள்ளியில்

17. $ay = x^2$; (a, a) ல்

18. $y^2 = \frac{x^3}{(2a - x)}$; (a, a) ல்

19. $x^2 + y^2 = a^2$; (x_1, y_1) ல்

20. $y = a \log (x^2 - a^2)$; (ஏதாவதொரு புள்ளியில்).

21. $x^4 y^5 = a^9$; (a, a) ல்

22. $y^2 = (x + 1)^2 (5 - x)$; (1, 4) ல்

23. $y : be^{-x/a}$ என்ற வளைகோடு X-அச்சைத் தாண்டும் பொழுது $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற நேர்கோட்டைத் தொடுகிறது என்று நிரூபி.

24. X-அச்சு, $y = 6x - x^2$ என்ற வளைகோட்டின், தொடுகோடு செங்கோடுகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{425}{8}$ என்று காண்.

25. $y^2 = 2\,ax$ என்ற பரவளையின் தொடுகோட்டடி அதனுடைய உச்சியில் இருபாகமாக்கப்படுகிறது என்றும், அதன் செங்கோட்டடி எப்பொழுதும் a-க்கு சமமான மாறிலியாக இருக்கும் என்றும் நிறுவுக.

26. $P\,(2, 3)$ என்பது $y = \dfrac{2\,x^2 + x - 7}{x^2 - 3}$ என்ற வளைகோட்டின் மேலும், $Q\,(-1, 2)$ என்பது $y + x^2 + 5\,x + 2 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் மேலும் உள்ளன. PQ கோடு இரு வளைகோடுகளுக்கும் செங்கோடாகும் என்று காண்பி.

27. $5\,x^6 - 10\,x^3 + x + 2\,y + 6 = 0$ என்ற வளைகோடு $(0, -3)$ என்ற புள்ளியினூடே செல்கிறது. அந்தப் புள்ளியில் அதற்கான செங்கோட்டைக் கண்டுபிடி. செங்கோடு மற்றும் இரு புள்ளிகளில் வளைகோட்டை சந்திக்கிறதென்றும், அவ்விரண்டு புள்ளிகளிலும் அது தொடுகோடாக அமைகிறது என்றும் காட்டு.

28. $y^2 = 9 - x$ என்ற வளைகோட்டின் $(5, 2)$ என்ற புள்ளியில் உள்ள செங்கோடு தொடுகோடுகளும், Y — அச்சும் ஏற்படுத்தும் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் கண்டுபிடி.

29. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற ஹைபோஸைக்லாய்டு (Hypocycloid) எனும் வளைகோட்டிற்கு அதன் தொடுகோட்டின் இரு அச்சுகளிடையே உள்ள பகுதி மாறிலி என்றும், அதன் மதிப்பு a என்றும் காட்டு.

30. $4\,x^2 + y^2 = 72$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோடு $(4, 4)$ என்ற புள்ளியினூடே செல்கிறது. அம்மாதிரியானத் தொடுகோடுகள் இரண்டு உண்டென்றும், அவைகளின் சமன்பாடுகள் $x + y - 12 = 0$, $14\,x + y = 60$ என்றும் காட்டு.

31. $x = a\,\cos^4\theta$, $y = a\sin^4\theta$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோடு, இரு அச்சுகளிலும் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டு (Intercepts) களின் மொத்தம் ஒரு மாறிலி என்று காட்டு.

32. $x^{m+n} = a^{m-n} y^{2n}$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோட்டடி l என்றும் செங்கோட்டடி k என்றும் வைத்தால் $l^m = k^n$ என்று காட்டு.

33. $y = a \log (x^2 - a^2)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, தொடுகோடு மற்றும் தொடுகோட்டடியின் நீளங்களின் மொத்தம் அந்த புள்ளியின் இரு கூறுகளின் பெருக்கல் தொகையின் நேர் விகிதம் என்று காட்டு.

34. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகள் வெட்டும் கோணங்களைக் கண்டுபிடி ;

(i) $y^2 = 4ax$; $x^2 + y^2 = 5a^2$

(ii) $y = x^2 + x + 1$; $2y = x^3 + 5x$

(iii) $y = x^3 - 3x^2 - 8x - 4$; $y = 3x^2 + 7x + 4$

(iv) $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$; $x^2 = 4ay$

(v) $\dfrac{x^2}{a^2 + \lambda} + \dfrac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(vi) $y = 6 - x^2$; $7x^2 + y^2 = 32$

(vii) $y^2 = x$; $x^2 + y^2 = 13$

(viii) $y^2 = 2px + p^2$; $y^2 = p^2 - 2px$

(ix) $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$; $x^2 + y^2 - 2y = 9$.

35. $Bx + Ay = AB$ எனும் நேர்க்கோடு $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ எனும் நீள் வளையத்திற்குத் தொடுகோடாக வேண்டுமானால் $B^2 a^2 + A^2 b^2$ என்பது $A^2 B^2$-க்குச் சமமாக வேண்டும் என்று நிரூபி.

36. $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ என்ற அதிபரவளைவின் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் k-என்றால், அதன் சமன்பாடு $y = kx \pm \sqrt{a^2 k^2 - b^2}$ என்று காட்டு. செங்குத்தான இரு தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை (Locus) $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ என்று காட்டு.

37. $x = a - \sqrt{b^2 - y^2} + b \log [b + \sqrt{b^2 - y^2}]$ எனும் வளைகோட்டிற்கு, அதன் தொடுகோட்டடி, செங்கோட்டடிகளின் மொத்தம் ஒரு மாறிலி என்று நிரூபி.

38. $y = 5x + x^2$ எனும் வளைகோட்டிற்கு, X — அச்சுடன் 45° கோணம் ஏற்படுத்தும் செங்கோட்டைக் கண்டுபிடி.

39. $4x^2 - y^2 = 36$ என்ற அதிபரவளைவின் செங்கோடுகள், $2x + 5y = 4$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணைகோடுகளாக உள்ளன. அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

விடைகள்

1. (a) $9x - y - 16 = 0$; $x + 9y - 20 = 0$;
   (b) $x + 4y = 3$.
2. (a) $7x - y - 9 = 0$; $x + 7y - 37 = 0$
   (b) $x + y = 2$; $x + y = -2$.
3. $yt = x + at^2$; $xt + y = 2at + at^3$.
4. $3x + 5y = 14$; $5x - 3y = 12$.
5. $2x + y - 2 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$
6. $4x - 5y + 12 = 0$; $5x + 4y = 26$.
7. $b^2 x_1 x + a^2 y y_1 = a^2 b^2$;
   $a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = x_1 y_1 (a^2 - b^2)$.
8. $2x - y = a$; $x + 2y = 3a$
9. $5x - 8y = 9$; $8x + 5y = 20$
10. $2y + x + 3 = 0$; $x - 2y - 5 = 0$
11. $ax + by = 0$; $bx - ay = 0$
12. $x_1 x + y_1 y - r^2 = 0$; $x_1 y - y_1 x = 0$
13. $y - 2x + a = 0$; $2y + x = 3a$
14. 2; 1/2;
15. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
16. $c \cos \frac{x}{c}$; $\frac{1}{2} c \sin \left(\frac{2x}{c}\right)$
17. $\frac{a}{2}$; $2a$
18. $\frac{a}{2}$; $2a$
19. $-\frac{y_1^2}{x'_1}$; $-x_1$

20. $\dfrac{x^2 - a^2 \log (x^2 - a^2)}{2x}$; $\dfrac{2a^2 x \log (x^2 - a^2)}{(x^2 - a^2)}$

21. $\dfrac{5a}{4}$; $\dfrac{4a}{5}$

22. $\dfrac{8}{3}$; 6

34. (i) $\tan^{-1}(3)$. (ii). 0 (iii) 0 (iv) $\tan^{-1}(3)$. (v) $\dfrac{\pi}{2}$

(vi) $(\pm 2, 2)$-ல் 5°, 54′; $(\pm 1, 5)$-ல் 8°, 58′ (vii) 109°, 39′

(viii) $\dfrac{\pi}{2}$ (ix) $\dfrac{\pi}{4}$

§ 1.6 ஒரே வளைகோட்டிற்குப் பல தொடுகோடுகள்

$y = f(x)$ (i) என்பது ஒரு வளைகோடு அதற்கு ஏதாவதொரு புள்ளி (X, Y) — ல் தொடுகோடு $y - Y = \dfrac{dy}{dx}(x - X)$ என்பது என்று கண்டோம். இந்த தொடுகோடு (a, b) என்ற புள்ளியினூடே செல்கிறது என்றால்:

$$(b - Y) = \frac{dy}{dx}(a - X) \qquad \dots \text{(ii)}$$

$y = f(x)$, (x, y) ல் n-படி சமன்பாடானால் (ii) சமன்பாடு $(n-1)$ படி சமன்பாடாகும். எனவே இவ்விரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகள் சாதாரணமாக $n(n-1)$ என்றாக அமையும். ஆகவே (a, b) என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து $f(x, y) = 0$ என்ற n-படி வளைகோட்டிற்குச் சாதாரணமாக $n(n-1)$ தொடுகோடுகள் அமையும். இந்த எண்ணை, அந்த வளைகோட்டின் **தரம்** (Class) என்று கூறுவோம்.

இவ்வாறு n-படி வளைகோடுகளின் **தரம்** (Class) $n(n-1)$ ஆகும். இருபடி வளைகோடுகளின் (Conics) தரம் 2; முப்படி வளைகோடுகளுக்குத் தரம் 6.

§ 1 7 தொடுகோட்டின் சமபடித்தான (Homogeneous) சமன்பாட்டமைப்பு

$F(x, y) = 0$ என்பது n-படி சமன்பாட்டுடைய ஒரு வளைகோடு என்று கொள்வோம். அதன் தொடுகோடு

$(Y-y) = -\frac{F_x}{F_y}(X-x)$ என்றுகிறது.

அதாவது $(X-x)F_x + (Y-y)F_y = 0$

$F(x, y) = 0$ என்பதை, Z-என்ற மாறியையும் பொருத்தி சமபடித்தாக மாற்றினால் ஆய்லரின் தேற்றத்தின்படி (Euler's Theorem).

$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = n \cdot F(x, y, z) = 0$ என்றுகும்.

எனவே $xF_x + yF_y = -ZF_z$. இதனை மேலுள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \dots (12)$$

எனவரும் சமன்பாடே, தொடுகோட்டின் சமபடித்தான அமைப்பு. (இங்கு வகைக்கெழு கண்டபிறகு Z=1 என்று பிரதியிட வேண்டும்.) சாதாரணமாக, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை தாக்குவது மிக எளிதாகையால், (12) வது அமைப்பை வரைவதும் சமபடித் சுலபமாகவே இருக்கும்.

எ. கா. 11.

$Ax^3 + By^3 = 1$ என்ற வளைகோட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதை சமபடித்தாக்க,

$F(x, y, z) = Ax^3 + By^3 - z^3 = 0$ என்றுகிறது.

$F_x = 3Ax^2;\ F_y = 3By^2;\ F_z = -3z^2$

எனவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$X(3Ax^2) + Y(3By^2) + Z(-3z^2) = 0$

$Z = 1$ என்று பிரதியிட,

$(Ax^2)X + (By^2)Y - 1 = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இந்த தொடுகோடு (a, b) என்ற புள்ளியினூடே செல்கிறது என்றால்,

$Aax^2 + Bby^2 = 1$ என்ற சமன்பாடு வரும். இங்கு (x, y) என்பது தொடுகைப் புள்ளியைக் (Point of Contact) குறிக்கும்;

ஆக தொடுகைப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $A a x^2 + B by^2 = 1$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

முடிவாக : (a, b) என்ற புள்ளியிலிருந்து $A x^3 + B y^3 = 1$ என்ற வளைகோட்டிற்கு 6 தொடுகோடுகளை வரையலாம். அந்த ஆறு தொடுகோடுகளின் தொடுகைப் புள்ளிகள் $Aa x^2 + B by^2 = 1$ என்ற சமன்பாட்டில் அமையும்.

§ 1.8 ஒரு வளைகோட்டிற்கு எவ்வளவு செங்கோடுகள் என்ற நியதி

$F(x, y) = 0$ என்ற வளைகோட்டை எடுத்துக் கொண்டால் (x, y) ல் அதன் செங்கோடு $(X - x) F y + (Y - y) F x = 0$ இது (x, y) ல் n-படித்தான சமன்பாடு. இது (h, k) புள்ளியினூடே சென்றால் $(h - x) F_y + (k - y) F_x = 0$ என்றாகும். எனவே இந்த சமன்பாட்டையும், $F(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாட்டையும் தீர்க்க, நமக்கு சாதாரணமாக n^2-மூலங்கள் கிடைக்கும்.

அதாவது ஒரு குறித்த $(h, \ )$ புள்ளியிலிருந்து $F(x, y) = 0$ என்ற n-படி வளைகோட்டிற்கு n^2-செங்கோடுகளை வரையலாம்.

எ. கா. 12.

$2x^2 + 3y^2 = 6$ என்கிற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். $(2, 3)$ என்கிற புள்ளியிலிருந்து இதற்குச் செங்கோடுகளை வரைவோம்.

(x_1, y_1) என்கிற புள்ளியில் செங்கோடு

$(3y_1) x + (2x_1) y = 5x_1 y_1$ என்றாகிறது. இதில் $x = 2$, $y = 3$ என்று பிரதியிட, $6y_1 + 6x_1 = 5x_1 y_1$ என்று வரும். $x_1 = \sqrt{3} \cos \theta$, $y_1 = \sqrt{2} \sin \theta$ என்று பிரதியிட்டால் $6\sqrt{2} \sin \theta + 6\sqrt{3} \cos \theta = 5\sqrt{6} \sin \theta \cos \theta$.

$$\tan \frac{\theta}{2} = t \text{ என்று வைத்தால் } \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}, \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

இந்த மதிப்புகளை பிரதியிட,

$$6\sqrt{2} \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + 6\sqrt{3} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 5\sqrt{6} \frac{2t(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} \text{; அதாவது}$$

$$2\sqrt{2}\, t(1 + t^2) + \sqrt{18}(1 - t^2)(1 + t^2) - 10t(1 - t^2) = 0$$

என்கிற 4-படி சமன்பாடு (t-மாறியில்) கிடைக்கும். இதன் மூலங்கள் t_1, t_2, t_3, t_4 ஆனால் நமக்கு நான்கு செங்கோடுகள் கிடைக்கும்.

எ. கா. 13.

$x = 2t, y = \frac{2}{t}$ என்பது ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு (Rectangular hyperbola). இதற்கு (1, 4) என்ற புள்ளியினூடே செல்லும் நான்கு செங்கோடுகளைக் கண்டுபிடி.

$$\text{இங்கு } \frac{dx}{dy} = \frac{2 \cdot t^2}{-2} = -t^2$$

எனவே செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\left(y - \frac{2}{t}\right) = t^2 (x - 2t)$$

அதாவது, $2t^4 - t^3 \cdot x + ty - 2 = 0$ இதில் $x = 1, y = 4$ என்று பிரதியிட, $2t^4 - t^3 + 4t - 2 = 0$

எனவே $(2t - 1)(t^3 + 2) = 0$; t-ன் இரு மதிப்புகள் $\frac{1}{2}, -2^{\frac{1}{3}}$ மற்ற இரண்டு மதிப்புகளும் கற்பனையானவை (Imaginary).

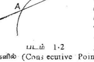
ஆக (1, 4) என்ற புள்ளியிலிருந்து $x = 2t, y = \frac{2}{t}$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவிற்கு நாம் இரு மெய்யான செங்கோடுகளையும், இரு கற்பனை செங்கோடுகளையும் வரையலாம். மெய்யான செங்கோடுகளின் சமன் பாடுகள் : —

$$x - 4y + 15 = 0$$

$$2x - 2^{\frac{1}{3}} y + (4 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 2) = 0$$

§ 1 · 9 அதிகப்படித்தான தொடுகை (Contact of Higher orders)

ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு வளைகோட்டை வெட்டினால் அது கீழ்க் கண்டவாறு அமையலாம்.

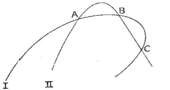


படம் 1·2

இங்கு A, B என்பன இரு வெட்டும் புள்ளிகள். B-என்பது A-ஐ நோக்கி வளை கோட்டின் மேலேயே நகருமானால் முடிவில் (In the limit) A-ஐ வந்தடையும். அப்போழுது, நேர்க்கோடு வளை கோட்டின் தொடு கோடாகிறது. எனவே தொடு கோடு, வளைகோட்டை இரண்டு அடுத்தடுத்து வரும் புள்ளிகளில் (Cons ecutive Points) சந்திக்கிறது எனலாம். இவ்வகை

சந்திப்பை நாம் ஒருபடித்தான தொடுகை என்று கூறலாம். அதாவது இரு வெட்டுப் புள்ளிகள் அடுத்தடுத்து அமையும் பொழுது ஒருபடித்தான தொடுகை (Contact of first order) ஏற்படுகிறது.

இப்பொழுது நாம் இரு வளைகோடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம் அவைகள் இரண்டிற்கும் மேலான புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.



படம் 1·3

I, II என்ற வளைகோடுகள் A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகளில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. இப்பொழுது C புள்ளி B-ஐ நோக்கிச் செல்ல, CB ஒரு தொடு கோடாகும்; B-என்பது A-ஐ நோக்கிச் செல்ல, AB என்பது ஒரு தொடு கோடாகும். இரண்டும் ஒருங்கே நிகழும் பொழுது A, B, C மூன்று புள்ளிகளும் அடுத்தடுத்து வந்துவிடும்; அல்லது இரு தொடு கோடுகளும் அடுத்தடுத்து அமையும். இத்தகைய தொடுகையை நாம் **இருபடித்தான தொடுகை** என்று கூறுவோம்.

பொதுவாக, ஒரு வளைகோடு m படித்தானதும் மற்றொன்று n-படித்தானதுமானால் அவை யிரண்டும், mn புள்ளிகளில் வெட்டும். இவைகளில் $(r+1)$ புள்ளிகள் அடுத்தடுத்து அமைந்தால், அவைகளுக்கு r- படித்தான தொடுகை உள்ளது என்று கூறுவோம்.

பொதுவாக, r-என்பது ஒற்றை எண்ணானால், இரு வளைகோடுகளும் ஒன்றையொன்று தாண்டிச் செல்லாது. (They will-not cross each other); r-என்பது இரட்டை எண்ணானால், ஒன்றையொன்று தாண்டிச் செல்லும்.

§ 1.10. கணக்கியல்படியான நிபந்தனைகள்:—

$y = F_1(x)$, $y = F_2(x)$ என்பவை இரு வளைகோடுகள். $(x + h)$ என்ற பொதுவான கிடைதூரத்திற்கான வளைகோட்டுப் புள்ளிகளை P_1, P_2 என்று குறிப்போம்.

அப்பொழுது $P_1 P_2 = F_1(x + h) - F_2(x + h)$

வலது பக்கக் கூறுகளை டெய்லரின் தேற்றத்தின் மூலம் விரிவாக்குக.

டெய்லரின் தேற்றம்

$$\left[f(a + h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots \right]$$

$$P_1 P_2 = [F_1(x) - F_2(x)] + h[F_1'(x) - F_2'(x)] + \frac{h^2}{2!}[F_1''(x) - F_2''(x)] + \dots\dots + \frac{h^r}{r!}[F_1^r(x) - F_2^r(x)] + + \dots\dots \quad (13)$$

இரு வளைகோடுகளும் வெட்டும்பொழுது $P_1 P_2 = 0$

(i) $F_1(x) = F_2(x)$ என்றால், (13)-ம் சமன்பாட்டில் $h = 0$ என்ற ஒரேபூச்சிய மூலம் (zero-root)கிடைக்கும். இரு வளைகோடுகளும் ஒன்றையொன்று சந்திக்கின்றன.

(ii) $F_1(x) = F_2(x)$; $F_1'(x) = F_2'(x)$. என்றால் (13)ம் சமன்பாட்டிலிருந்து $h^2 = 0$ என்று வரும். அதாவது இரண்டு பூச்சிய மூலங்கள் கிடைக்கும். எனவே இருவளைகோடுகளும் அடுத்தடுத்த இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கும். இதுவே **ஒருபடித்தான தொடுகை** எனப்படும். அதாவது ஒருபடித்தான **தொடுகைக்கு** நிபந்தனைகள் :—

$$F_1(x) = F_2(x);\; F_1'(x) = F_2'(x) \quad (14)$$

(iii) $F_1(x) = F_2(x)$; $F_1'(x) = F_2'(x)$, மற்றும் $F_1''(x) = F_2''(x)$ என்றால், (13) லிருந்து $h^3 = 0$ என்று வரும். அதாவது இரு வளைகோடுகளுக்கும் அடுத்தடுத்து மூன்று பொதுப் புள்ளிகள் (common points) இருக்கும். இதனையே நாம் இருபடித்தான தொடுகை என்று கூறினோம். ஆக இருபடி தொடுகைக்கான நிபந்தனைகள் :—

$$F_1(x) = F_2(x);\; F_1'(x) = F_2'(x);\; F_1''(x) = F_2''(x) \quad (15)$$

இம் முறையிலேயே கணக்கிட்டால்,

r-படித்தான தொடுகைக்கு நிபந்தனைகள் :

$F_1(x) = F_2(x)$; $F_1'(x) = F_2'(x)$; ....

... .. $F_1{}^r(x) = F_2{}^r(x)$ — (16)

எ. கா. 14.

$\left(x - \frac{3}{4}a\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{a^2}{2}$ மற்றும் $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

என்ற இரு வளைகோடுகள் $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ என்ற புள்ளியில் மும்படித் தொடுகையுள்ளவை என்று காட்டு. (M. sc-68)

$$F_1 = \left(x - \frac{3}{4}a\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}a\right)^2 - \frac{a^2}{2} = 0 \quad \text{— (i)}$$

$$F_2 = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{a} = 0 \quad \text{— (ii)}$$

இரு வளைகோடுகளும் $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ என்ற புள்ளியினூடே செல்கின்றன. எனவே $F_1 = F_2$

இரு சமன்பாடுகளையும் வகையிட,

(i) $2\left(x - \frac{3}{4}a\right) + 2\left(y - \frac{3}{4}a\right)y_1' = 0$ — (iii)

இங்கு $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{a}{4}$ என்று பிரதியிட, $y_1' = -1$

(ii) லிருந்து $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y_2' = 0$ — (iv)

இங்கும் $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{a}{4}$ என்று பிரதியிட $y_2' = -1$

எனவே $F_1' = F_2'$

மறுபடியும் வகையிட,

(iii) லிருந்து $2 + 2\left(y - \frac{3}{4}a\right)y_1'' + 2(y_1')^2 = 0$ ... (v)

$x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{a}{4}$, $y_1' = -1$ என்று பிரதியிட, $y_1{}^{11} = \frac{4}{a}$

(iv) லிருந்து $\frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}}(y_2')^2 + \frac{1}{2\sqrt{y}} y_2^{11} = 0$ ... (vi)

இங்கு $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{a}{4}$, $y_2' = -1$ என்று பிரதியிட

$y_2^{11} = \frac{4}{a}$; எனவே $F_1^{11} = F_2^{11}$.

மறுபடியும் வகையிட (v) லிருந்து

$2(y - \frac{3}{4}a) y_1^{111} + 2y_1^{11} y_1^1 + 4y_1^1 y_1^{11} = 0$

இங்கு $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{a}{4}$, $y_1^1 = -1$, $y_1^{11} = \frac{4}{a}$ என்று

பிரதியிட $y_1^{111} = -\frac{24}{a^2}$

(vi) லிருந்து $\frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}} \cdot 2y_2' \cdot y_2'' + (y_2')^2$

$+ \frac{3}{8y^{\frac{5}{2}}}(y^1_2) + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y_2^{111} - \frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}} y_2^1 \cdot y_2^{11} = 0$

இங்கும் அதே மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$y_2^{111} = \frac{-24}{a^2}$ என்று வருகிறது.

எனவே, $F_1 = F_2$; $F_1' = F_2'$; $F_1^{11} = F_2^{11}$; $F_1^{111} = F_2^{111}$ ஆதலால் இரு வளைகோடுகளும் முப்படித்தான தொடுகை உள்ளவை.

பயிற்சிகள் II

1. $y = ax^5$ என்ற வளைகோட்டிற்கு (a, b) என்ற புள்ளியிலிருந்து பல தொடுகோடுகள் வரையப்படுகின்றன. அவைகளின் தொடுகைப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

2. $y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு இரு படித்தான தொடுகையுடைய வட்டத்தைக் கண்டுபிடி.

3. n_1, n_2, n_3, n_4 என்பவை ஏதாவதொரு புள்ளியிலிருந்து $y^2 = x^3$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்கோடுகளின் நீளங்கள். அதே புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடு களின் நீளங்கள் t_1, t_2, t_3 ஆனால் $t_1 t_2 t_3 = 27\, n\, n_2 n_3 n_4$ என்று நிரூபி.

4. $y^2 = 4\,a\,x$ என்ற பரவளைவுடன் முப்படித் தொடுகை கொண்ட செவ்வக அதிபரவளைவின் மையங்களின் நியமப்பாதை யைக் கண்டுபிடி.

5. $y = f(x)$ என்ற ஒரு வளைவுடன் முப்படித் தொடுகை கொண்ட கூம்பு வளைவுகளின் மையப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை ஒரு நேர்க்கோடு என்று நிரூபி. [M. Sc. 62[

[குறிப்பு: கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு $2\,y = a\,x^2 + 2\,h\,x\,y + by^2$ என்று கொள்க. இங்கு அந்த வளைவின் தொடுகோடும் செங்கோடும், இரு அச்சுகளாகும் (Co-ordinate axes)]

6. $x^2 - x\,y + y^2 = y$ என்ற நீள்வட்டத்துடன் ஆதியில் முப்படித் தொடுகையுடைய பரவளைவின் செவ்வகலம் (Latus-rectum) கண்டுபிடி.

[குறிப்பு: பரவளைவின் சமன்பாட்டை $(2\,x + \beta\,y)^2 + 2\,f\,y + 2\,g\,x + C = 0$ என்று எடுத்துக் கொள், அப்பொழுது அதன் செவ்வகலம் $= 2\,(\alpha f - \beta\,g)\,|\,(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}$ என்றுகும்]

விடைகள்

1. $3\,h\,y - k\,x - 2\,x\,y = 0$

2. $(x - l)^2 + (y - m)^2 = k^2$ இங்கு $k = \dfrac{[1+(f')^2]^{\frac{3}{2}}}{f''}$,

மற்றும் $l = x - f' \dfrac{[1+(f')^2]}{f^{11}}$;

$m = y + \dfrac{1+(f')^2}{f^{11}}$,

4. $y^2 + 4\,a\,(x + 2\,a) = 0$

2. துருவ ஆயத் தொலைகள்

(POLAR COORDINATES)

அல்லது

கோண தூரக் கூறுகள்

§ 2·1. **வரையறைகள் :—**

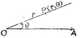
x மற்றும் y-இவ்விரு அச்சுகளை வைத்து ஆயத் தொலைகளை கணக்கிடும் முறையை அறிந்துள்ளோம். இது மட்டும் அல்லாது மற்றும் பல ஆயத்தொலை முறைகள் உள்ளன. அச்சுக்களை செங்குத்தானவைகளாகக் கொள்ளாது சாய்வச்சுகளாகக் கொள்வது ஒரு முறை. இப்பொழுது துருவ ஆயத் தொலைகளைப் பற்றிக் கூறுவோம். இதனையே கோணத்தூரக் கூறுகள் என்றும் கூறுவர். போலார் கூறுகள் என்றும் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடலாம்.

இங்கு ஒரு புள்ளியைக் குறிப்பிட இரு கூறுகளை பின்பற்றுவோம்: ஒன்று மாறிலியான ஒரு புள்ளியிலிருந்து இந்த புள்ளியின் தூரம்; மற்றொன்று—மாறிலி புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட ஒரு நேர்க்கோட்டுடன் இரண்டு புள்ளிகளையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு ஏற்படுத்தும் **கோணம்.**

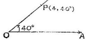
மாறிலியான புள்ளியை துருவம் (Pole) என்று கூறுவோம். அதிலிருந்து வரைந்த நேர்கோட்டைத் தொடக்கக்கோடு (Initial-line) என்போம்.

பல கணக்குகளைப் போடும் பொழுது டேகார்டின் (Descartes) கூறுகள் பயனுள்ளவையாக இருக்கலாம்; வேறுபல கணக்குகளுக்கு துருவ ஆயத் தொலைகள் பயனுள்ளவைகளாக இருக்கலாம். போகப்போக இவ்விரண்டு முறைகளைப் பற்றியத் தெளிவு

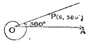
அதிகமாகும். குறிப்பிட்ட கணக்கை எளிதில் போட எந்த முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும் என்பது பயிற்சிகளின் பின்பே ஏற்படும்.



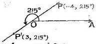
படம் 2.1



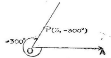
படம் 2.2



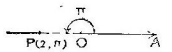
படம் 2.3



படம் 2.4



படம் 2.5



படம் 2.6

படம் 2-1-ல் OA என்பது தொடக்கக்கோடு, O என்பது துருவம் P என்ற புள்ளியின் கூறுகளை (r, θ) என்று கூறிப்பிட்டுள்ளோம். இங்கு θ என்ற கோணம் நேர் வழியில் (Positively) கணக்கிடப் பட்டுள்ளது. $\overline{OP}$ என்பது நேர்வழி கணக்கிடுதல்தான். கோணத்தை இடஞ்சுழியாகக் கணக்கிட்டால் நேர் வழி; வலஞ்சுழியாகக் கணக்கிட்டால் எதிர் வழி. அதுபோலவே தூரங்களைக் கோணச் சிறையையொட்டி கணக்கிடுதல் நேர்வழி, எதிர் பாகத்தில் கணக்கிடுதல் எதிர்வழி.

படம்-2-2-ல் (4, 40°) என்ற புள்ளி குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இரு துருவ ஆயத் தொலைகளும் நேர் எண்களே. படம் 2·3-ல் (6, 380°) என்ற புள்ளியைக் குறிப்பிட்டுக் காண்பித்துள்ளோம். இங்கும் இரு ஆயத் தொலைகளும் நேர் எண்களானாலும், கோணம் 360°-ஐ விட அதிகமாய் உள்ளது. நாம் (6, 20°)-என்ற

புள்ளியைக் குறித்தாலும் கூட அதுவும் இதே இடத்திலேதான் அமையும். அதாவது, பொதுவாகக் கூறின், (r, θ), $(r, \theta + 360^\circ)$ $(r, \theta + 720^\circ)$ ...... என்ற ஆயத் தொலைகள் எல்லாம் ஒரே புள்ளியையே குறிப்பிடும். அச்சுக் கூறுகள் முறையில் இவ்வகையான தொலைகள் இல்லையென்பது குறிப்பிட வேண்டியதுஒன்று.

படம் 2-4-ல், $(-4, 215^\circ)$ என்ற புள்ளி குறிக்கப்பட்டுள்ளது. முதலில் 215° கோணத்தை நேராகக் கணக்கிட்டு வரும் கோணச்சிறையில் எதிரிடையாக 4 என்ற தூரத்தைக் குறித்தால் P என்ற புள்ளி கிடைக்கும். இங்கு தூரம் -4 என்பது எதிர் எண் (அல்லது குறை எண்). $(3, 215^\circ)$ என்ற புள்ளியும் அதே படத்தில் P' என்ற இடத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. படம் 2-5 ல் $(3, -300^\circ)$ என்ற புள்ளியைக் கவனி. கோணம் எதிர் எண்ணானதால், கணக்கிடுதல் வலஞ்சுழியாகச் சென்றுள்ளது. படம் 2·6-ல் கோணம் π ரேடியன்களைக் கொண்டது. இதே புள்ளியை $(-2, 0)$ என்றும் குறிப்பிடலாம் என்பதும் வெளிப்படை.

அதாவது ஒரே புள்ளியைக் குறிப்பிட பல ஆயத் தொலைகளைப் பயன்படுத்தலாம்; டேக்கார்ட் முறைப்படி ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளிக்கு ஒரே ஒரு இணைக் கூறுகள் தாம் இருக்க முடியும்; ஒரு கூறு (a, b) என்றிருந்தால் அதற்கான புள்ளியும் ஒன்றே ஒன்று தான். அதாவது புள்ளிகள் இடையேயும், அச்சுக் கூறுகள் இடையேயும் ஒன்றுக் கொன்றான ஒத்தியைபு இருக்கும். ஆனால் துருவ ஆயத்தொலை முறையில் இவ்வகை ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபு (one-to-one correspondence) இல்லை என்பதனை கவனிக்க வேண்டும்.

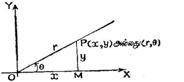
துருவத்தைக் குறிக்க : $(0, \alpha)$ என்றுகொள்ளலாம். இங்கு α என்பது எந்த கோணமாக வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம்.

இம்முறையில் புள்ளிகளைக் குறிப்பிடபோலார் கோஆர்டினேட் (Polar coordinate) தாள்கள் கிடைக்கின்றன, இவைகளிலும் சாதாரண கிராப் தாள்களைப் போல் கட்டங்கள் வரையப்பட்டிருக்கும். ஒருமைய வட்டங்கள் பல வரையப்பட்டிருக்கும். ஆரங்களை ஒட்டிப் பற் பலகோடுகள் வரையப்பட்டுருக்கும்.

r — என்ற தூரத்தை **ஆரைத்திசையி** (Radius vector) என்றும் θ — என்ற கோணத்தை " வீச்சம் " அல்லது ஆரைக்கோணம் (Amplitude or Vectorial angle) என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு. பொதுவாக r — ன் மதிப்பை நேர்எண்ணாகக் கொள்வது தான் வழக்கம்.

§ 2·2. அச்சுக் கூறு முறைக்கும் போலார் முறைக்கும் உள்ள தொடர்புகள்

அச்சுக் கூறு முறையிலிருந்து துருவ முறைக்கும் அல்லது துருவ முறையிலிருந்து அச்சுக் கூறு முறைக்கும் மாறுதல் செய்ய வேண்டி வரலாம். எனவே இரண்டு முறைகளையும் ஒரே படத்தில் காண்போம்..



படம் 2.8

O-என்ற ஆதியையே துருவமாகவும், X-அச்சினைத்தொடக்கக் கோடாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம். P என்ற புள்ளியின் கூறுகள் ஒரு முறையில் (x, y) என்றும், மறுமுறையில் (r, θ) என்றும் குறிக்கப் படலாம். (படம் 2·8 பார்க்க)

அப்பொழுது $\cos\theta = \frac{x}{r}$ மற்றும் $\sin\theta = \frac{y}{r}$

என்றுகிறது. எனவே

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{17}$$

என்ற சமன்பாடுகள் அச்சுக் கூறு முறையிலிருந்து கோணத் தூரக் கூறு முறைக்கு மாறப் பயன்படும்.

(17) லிருந்து $r^2 = x^2 + y^2$ மற்றும் $\tan\theta = \frac{y}{x}$ என்று கிடைப்பதால்

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{18}$$

என்ற சமன்பாடுகள் போலார் முறையிலிருந்து கார்ட்டீஸியன் முறைக்குமாறப் பயன்படும்.

எ. கா. 1.

போலார் முறையில் $(3, 135°)$ என்ற புள்ளிக்கான அச்சுக் கூறுகளைக் கண்டுபிடி.

$$x = r\cos\theta = 3\cos 135° = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y = r\sin\theta = 3\sin 135° = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

எனவே $x = \frac{-3}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

எ. கா. 2.

அச்சுக் கூறுகள் (3, — 3) என்றால் அப்புள்ளியின் போலார் கூறுகள் எவை?

இங்கு $x = 3$, $y = -3$ எனவே $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(-1)$$

θ-ன் மதிப்பு 135° ஆகவும் இருக்கலாம். 315° ஆகவும் இருக்கலாம் [ஏனென்றால் $\tan(135°) = -\tan 45°$; $\tan 315° = \tan(360 - 45°) = -\tan 45° = -1$] ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி 4 வது காற்பகுதி (Quadrant) யில் உள்ளதால், 315° என்பதுதான் சரியான விடை.

அல்லது

$\cos\theta = \frac{x}{r} = 1$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = -1$ எனவே θ என்ற கோணம் நான்காவது காற்பகுதியில்தான் இருக்க வேண்டும்—என்றும் கணக்கிடலாம்.

எ. கா. 3.

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் போலார் வடிவம் என்ன?

$x^2 + y^2 = r^2$ ஆனதால் $r = a$ என்பதே போலார் வடிவம் இந்த வடிவம் மிகவும் எளிதாக உள்ளதைக் காணலாம்.

$r = a$ என்பது துருவத்தை மையமாக உடைய மற்றும் ஆரம் 'a' ஆக உடைய வட்டத்தைக் குறிக்கிறது.

எ. கா. 4.

$r = 8\cos\theta$ என்பதின் கார்ட்டீசியன் வடிவத்தையும் $x^2 - y^2 = a^2$ என்பதின் போலார் வடிவத்தையும் கண்டுபிடி.

(i) $r = 8\cos\theta$

(18) சமன்பாட்டினைப் பயன்படுத்த, இந்தச் சமன் பாட்டை r-ஆல் பெருக்குவோம். $r^2 = 8r \cos \theta$. எனவே $x^2 + y^2 = 8x$ என்றாகிறது. இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$(x - 4)^2 + y^2 = 16$ அதாவது, மையம் $(4, 0)$ விலும், ஆரம் $= 4$ ஆகவும் உள்ள வட்டம்.

(ii) $x^2 - y^2 = a^2$

(17) சமன்பாட்டினைப் பயன்படுத்தினால்

$r^2 (\cos^2 - \sin^2 \theta) = a^2$ அல்லது $r^2 \cos 2\theta = a^2$. இது ஒரு அதிபரவளைவினைக் குறிப்பிடும்.

2·3 வரைப்படத்தில் போலார் வளைகோடுகளை வரைதல் :—

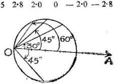
$r = f(\theta)$ என்பது ஒரு சமன்பாடானால், இதில் பொருந்தும் $r = \theta$ மதிப்புள்ள எல்லா புள்ளிகளினூடே செல்லும் வளை கோடுதான் $r = f(\theta)$ என்பதின் வரைப்படமாகும். துருவ ஆயத்தொலை முறையில் வரைப்படம் போட போலார் தாள்கள் தான் வேண்டும் என்பதில்லை. குத்து மதிப்பாகவும் நாம் வரைப் படத்தை வரையலாம்.

θ என்பதற்குப்பல மதிப்புகளைத்தந்து அவற்றிற்கான r-மதிப்பு களையும் பெற்று, இரண்டையும் வரைப் படத்தில் பொருத்தலாம்.

எ. கா. 5.

$r = 4 \cos \theta$-வின் வரைபடம்

$\theta = 0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r = 4$	3·5	2·8	2·0	0	— 2·0	— 2·8	— 4



படம் 2·9

வடிவம் வட்டத்தைப் போலுள்ளதைக் காண்கிறோம். வட்டமே தான் என்பது எ. கா. 4 (i) லிருந்து தெரியும்.

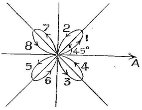
பொதுவாக $r = a \cos \theta$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$r = a \sin 2\theta$ என்பதின் வரைபடத்தை வரைக.

θ என்பது 0°, 90°, 180°, 270°, 360° என்ற மதிப்புகளுக்கு $r = 0$ ஆகிறது. மற்றும் $\theta = 45°, 225°$, ஆனால் $r = a$; மற்றும் $\theta = 135°, 135°$ ஆனால் $r = -a$ மற்றும்

$0 \le \theta \le 45°$	ஆக இருக்கும்பொழுது	$0 \le r \le a$
$45° \le \theta \le 90°$	,,	$a \ge r \ge 0$
$90° \le \theta \le 135°$	,,	$0 \le r \ge -a$
$135° \le \theta \le 180°$	,,	$-a \le r \le 0$
$180° \le \theta \le 225°$	,,	$0 \le r \le a$
$225° \le \theta \le 270°$	,,	$a \ge r \ge 0$
$270° \le \theta \le 315°$	,,	$0 \ge r \ge -a$
$315° \le \theta \le 360°$	,,	$-a \le r \le 0$

எனவே வரைபடமானது கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்:



படம் 2·10

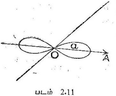
அம்புக் குறிகளும், 1, 2......8 என்ற எண்களும் வளைகோட்டின் போக்கினைக் குறிக்கும். 4-இதழ் ரோஜாப்பூப்போல் அமைந்த படம் கவர்ச்சியாக இருக்கிறது.

இதைப் போலவே $r = a \cos b\theta$ அல்லது $r = a \sin b\theta$ என்ற வளைகோடும் $2b$ இதழ்கள் கொண்டு இருக்கும் (b இரட்டை எண் ஆனால்). b ஒற்றை எண் என்றால் b-இதழ்கள் தான் இருக்கும்.

எ. கா. 6.

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (அல்லது $r^2 = a^2 \sin 2\theta$) என்பதின் வரை படம்.

இடது பக்கத்தின் r^2 என்பது மிகை எண் (+ve integer) ஆதலால் வலது பக்கக் கோவையும் மிகையாகவே இருக்க வேண்டும். எனவே θ என்பதின் மதிப்பு $45° — 135°$ க்குள் இருக்க முடியாது (ஏனென்றால் 2θ என்பது $90°—270°$ என்ருகும். $\cos 2\theta$ என்பது குறை எண்ணுகும்.) மற்றும் r-ன் மதிப்பு $(-a, +a)$க் குள்ளேயே அடங்கியிருக்கும். θ மிகை யெண்ணுனலும், குறை எண்ணுனலும் r-ன் மதிப்புப் பாதிக்கப் படாது. எனவே வளைகோடு துருவத்தை ஒட்டி சமச்சீராக அமைந்திருக்கும்; மற்றும் துவக்கக் கோட்டையொட்டியும் சமச்சீராக அமையும். θ-ன் மதிப்பு $-45°$-லிருந்து $0°$ வரையிருக்கும் பொழுது, r-என்பது 0-விலிருந்து a வரை அதிகரித்துக் கொண்டே போகும்; θ-ன் மதிப்பு 0-லிருந்து $45°$ வரை செல்லுங் கால், r-ன் மதிப்பு a-லிருந்து 0-வரை குறைந்து கொண்டே போகும். எனவே, வளைகோட்டின் வடிவம் $-45° \leq \theta \leq 45°$ இடைவெளியில் அமையும். துருவத்தையொட்டிச் சமச்சீருள்ளதால், முழு வடிவமும் மேற்கண்டவாறு அமையும். இதனை பர்னேலுயின் லெம்னிஸ்கேட் (Bornoulli's Lemniscate) என்று அழைக்கிருர்கள்.

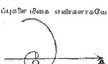


படம் 2.11

எ. கா. 7

$r = a\theta$ என்பதின் வரைபடம் வரைக.

இங்கு r-ன் மற்றும் θ-வின் மதிப்புகளை மிகை எண்களாகவே கொள்வது மரபு. θ வளர்ந்து கொண்டேபோனல் r-ன் மதிப்பும் வளர்ந்து கொண்டே போகும். எனவே, வடிவம் சுருள் வடிவத்தில் அமையும். இந்த வளைகோட்டை ஆர்க்கிமிடீஸின் சுருள் (Spiral of Archimedes) என்று கூறுவர்.



படம். 212.

வடிவத்தைக்காண கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளைக் குறித்துச் செயற் படலாம்.

($a = 1$ என்றால்)

$$\theta = 0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{4} \quad 2\pi \quad \frac{5\pi}{2}$$

$$r = 0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{4} \quad 2\pi \quad \frac{5\pi}{2}$$

இதே போன்ற மற்ற சுழல்கள் : $r = e^{a\theta}$ என்ற லாகரித்மிக் சுழல்; $y = a\theta$ என்ற ரெஸிப்ரோகல் சுழல்.

போலார் முறையில் மற்றும் பல வளைகோடுகளின் வரை படங்களை கடைசி அத்தியாயத்திலும் காணலாம்.

பயிற்சி 11—1

1. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளை சாதாரண வரைத்தாளிலேயே (போலார்தாள் கிடைக்காவிடில்) குறிக்கவும்; மற்றும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும், கோணத்தின் மதிப்பு 360°-ஐ மீறுதவாறு மேலும் இரண்டு ஆயத்தொலைகளைக் காட்டவும்.

   (*a*) $5, 30^\circ$ (*b*) $6, -60^\circ$ (*c*) $(-4, \frac{2}{3}\pi)$ (*d*) $(2, -\frac{3}{4}\pi)$

2. கீழ்க்கண்ட போலார் கூறுகளுக்குச் சமமான அச்சுக் கூறுகளைக் கண்டுபிடி.

   (i) $(3, 90^\circ)$ (ii) $(7, 0^\circ)$ (iii) $(-1, -60^\circ)$ (iv) $(4\sqrt{2}, 135^\circ)$

3. புள்ளிகளின் அச்சுக் கூறுகள் கீழ்க்கண்டவாறுனால், அவற்றின் போலார் கூறுகள் யாவை ?

   (*a*) $(0, 3)$ (*b*) $(-1, 0)$ (*c*) $(-2\sqrt{3}, 2)$ (*d*) $(4, -3)$

4. கீழ்க்கண்ட கார்ட்டீஸியன் சமன்பாடுகளுக்குத் தகுந்த போலார் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

   (i) $x = 3$ (ii) $2x - y = 3$ (iii) $y^2 = 6x$ (iv) $xy = a^2$

5. போலார் சமன்பாடுகள் :

   (*a*) $r = 5$ (*b*) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (*c*) $r \cos\theta = 2$ (*d*) $r = 2\sin\theta + 2\cos\theta$ (*e*) $r = \frac{4}{1 - 2\cos\theta}$ (*f*) $r = \frac{3}{5\sin\theta + 3\cos\theta}$

என்று இருப்பின் அவைகளின் கார்ட்டீஸியன் சமன்பாடுகள் யாவை ?

6. கீழ்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கான வரைபடம் வரைக.

(i) $r = 2 \sin \theta$ (ii) $r = 4 - \cos \theta$ (iii) $r = a\,(1 + \cos \theta)$

(iv) $(x^2 + y^2)^3 = a^2 y^4$ (v) $x^3 + x^2 y^2 = a^2 y$

(vi) $r = \frac{\theta}{2}, \; -2\pi \le \theta \le 2\pi$

(vii) $r\,\theta = 4, \; \frac{\pi}{4} \le \theta \le 4\pi$

(viii) $r^2\,\theta = 4, \; \frac{\pi}{4} \le \theta \le 4\pi.$

விடைகள்

1. (a) $(-5, 210°)$; $(5, -330°)$ (b) $(6, 300°)$; $(-6, 120°$

2. (i) $(0, 3)$ (ii) $(7,0)$ (iii) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (iv) $(-4, 4)$

3. (a) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ (c) $(4, 135°)$

(d) $(5{,}323°)$

4. (i) $r \cos \theta = 3$ (ii) $r\,(2 \cos \theta - \sin \theta) = 3$

(iii) $r = 6 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta$ (iv) $r^2 = 2\,a^2 \operatorname{cosec} 2\,\theta$.

5. (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $y = \frac{\sqrt{2}}{3}\,x$ (c) $x = 2$

(d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (e) $3x^2 - y^2 + 16x + 16 = 0)$

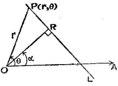
(f) $5y + 3x = 3$

2.4. நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

கார்ட்டீஸியன் சமன்பாடுகளிலிருந்து போலார் சமன்பாடுகளை (17)-லிருந்து பெறலாம். எனினும், அவைகளைத் தனியே கணக்கிடுவது பலன் தரவல்லது. O-என்பது துருவமாகவும், OA என்பது தொடக்கக் கோடாகவும் இருக்கட்டும். PL என்பது ஒரு

நேர்கோடு, P-என்பது அதன் மேலுள்ள ஒரு பொதுப் புள்ளி, OR என்ற செங்குத்தை O-விலிருந்து PL-க்கு வரைக ;

$\angle ROL = \alpha$ என்றும், $OR = p$ என்றும் கொள்வோம்.



படம் 2.13

Δ POR-லிருந்து $\cos(\theta - \alpha) = \frac{p}{r}$ அல்லது

$$r \cos(\theta - \alpha) = p \quad \text{... (19)}$$

என்பது தான் PL-என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாடு. P-என்ற புள்ளி, PL-ல் எங்கிருப்பினும் இந்தச் சமன்பாடு பொருத்தமாக இருக்கும். இந்தச் சமன்பாட்டை ஒரு நேர்கோட்டின் பொதுவான போலார் வடிவம் எனலாம். OA-என்ற தொடக்கக் கோட்டிற்கு இணையான நேர்க் கோடுகளுக்கு $\alpha = 0°$ அல்லது $180°$ ஆகும். எனவே அவைகளின் சமன்பாடு

$$r \cos\theta = \pm p \quad \text{... (20)}$$

தொடக்கக் கோட்டிற்குத் துருவத்தில் ஒரு செங்கோட்டை வரைந்தால் அதனைப் போலார் அச்சு (Polar Axis) எனலாம். அதற்கு இணையான கோடுகளானல் $\alpha = 90°$ அல்லது $270°$ என்றாகும். எனவே அவைகளுக்கான சமன்பாடு

$$r \sin\theta = \pm p \quad \text{... (21)}$$

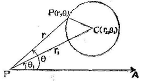
துருவத்தினூடே செல்லும் நேர்கோடுகளுக்கு $p = 0$ ஆகும். எனவே $r \cos(\theta - \alpha) = 0$ என்றால் $r = 0$ அல்லது $\cos(\theta - \alpha) = 0$. இரண்டாம் சமன்பாட்டிலிருந்து $\theta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ அல்லது $\theta = \alpha \pm \frac{\pi}{2} = k$ என்றாகிறது.

எனவே $\theta = k$ ... (22)

என்பது துருவத்தினூடே செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.

§ 2. 5. வட்டத்தின் போலார் வடிவம்

$r = a$ என்பது துருவத்தில் மையமும், a-என்ற ஆரையும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு என முன்பே கண்டோம். இப் பொழுது மையப் புள்ளி (r, θ_1)-வினுள்ள a-என்ற ஆரையுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிப்போம்.



படம் 2.14

$\triangle OPC$-யிலிருந்து $PC^2 = OP^2 + OC^2 - 2 \cdot OP \cdot OC \cos \angle POC$

அதாவது $r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos(\theta - \theta_1) = a^2$ ... (23)

என்பது தான் பொதுவான சமன்பாடு.

து. மு. 1 :

மையம் (a, o) விலிருந்தால்,

$r_1 = a, \theta_1 = o$. எனவே

$r^2 + a^2 - 2 a r \cos \theta = a^2$

அல்லது $r = 2 a \cos \theta$ (23-A)

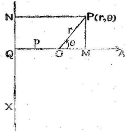
துணை முடிவு 2 :

மையம் $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ ஆனால் $r_1 = a; \theta_1 = \frac{\pi}{2}$

எனவே $r = 2a \cos \theta$ (23 – B)

ஆக, $r = 2a \cos \theta$; $r = 2a \sin \theta$ என்பவை வட்டத்தைக்குறிக்கும் சமன்பாடுகள்.

2·6. கூம்பு வளைவின் (Conic) சமன்பாடு



படம் 2·15

குவியம்—இயக்குவரைப்பண்புகளைக்கொண்டு கூம்புவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். குவியத்தைத் துருவத்தோடு இணைத்து இயக்குவரையைத் தொடக்கக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக கொள்வோம். எனவே O என்பது குவியம்; XN என்பது இயக்குவரை. $P(r, \theta)$ என்பது கூம்பு வளைவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியென்றும், e என்பது எக்ஸென்ட்ரிஸிடி (மையக் கவர்ச்சி) என்றும் $OQ = p$ என்றும் வைத்துக் கொள்வோம்.

$$PN = MO + OQ = r\cos\theta + p$$

கூம்பு வளைவின் பண்பினுல் $\frac{OP}{PN} = e \quad \therefore PN = \frac{r}{e}$

ஆகவே $\frac{r}{e} = r\cos\theta + p$ அல்லது $r = \frac{pe}{1 - e\cos\theta}$

$pe = l$ என்ருல் $r = \frac{l}{1 - e\cos\theta}$; $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$ (24)

இயக்குவரை O-விற்கு வலப்பக்கத்தில் p-தூரத்தில் இருந்தால்

$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$ அல்லது $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ (25)

என்ருகும்.

2·7. இருவளை கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளிகள் :

இரு வளைகோடுகளின் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தால், பொதுவாகக் கார்ட்டீஸியன் முறையில் அவ்விரு வளைகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளிகள் கிடைக்கும். ஆனால், இரு போலார் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தால் அப்படி வெட்டுப் புள்ளிகள் கிடைத்துவிடும் என்று சொல்லிவிடமுடியாது. ஏனென்றால் ஒரே புள்ளியைக் குறிக்க பல போலார் கூறுகள் உள்ளன. இதனை நாம் முன்பே கண்டோம். எனவே இரு போலார் வளைகோடுகள் வெட்டுகின்றனவா என்பதனைக்காண, இரண்டின் வரைபடங்களை வரைந்துபார்ப்பது தான் நல்லது. இயற்கணித முறையில் தீர்த்து வந்த புள்ளிகள் இரு சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்துமா என்பதைப் பார்க்கவேண்டும்.

எ. கா. 8.

$r^2 = 2a^2 \cos\theta$; $r = a$ என்ற வளைகோடுகள் எங்கு வெட்டுகின்றன ?

$r = a$ என்று பிரதியிட $\cos\theta = \frac{1}{2}$ என்று வருகிறது. $\theta = \frac{\pi}{3}$ அல்லது $\theta = -\frac{\pi}{3}$. எனவே வெட்டும் புள்ளிகள் $\left(r, \frac{\pi}{3}\right)$ மற்றும், $\left(r, -\frac{\pi}{3}\right)$ என்பவை. இரண்டும் இரு சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்துகின்றன.

எ. கா. 9.

$r^2 = \sqrt{3} \sin 2\theta$; $r = \sqrt{2} \cos\theta$ என்ற வளைகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி.

பிரதியிட $2\cos^2\theta = \sqrt{3}\sin 2\theta = \sqrt{3}\, 2 \sin\theta \cos\theta$

$\cos\theta = \sqrt{3} \sin\theta$ அல்லது $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\theta = 30^\circ, 210^\circ \ldots\ldots$

இந்த மதிப்புகளை இப்பொழுது இரு சமன்பாடுகளிலும் பிரதியிடுவோம்.

$\theta = 30^\circ$ ஆனால்

$$r = \sqrt{2} \cos 30^\circ = \sqrt{2}\, \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,;$$

$$r^2 = \sqrt{3}\, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

அல்லது $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$ எனவே $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 30^\circ)$ என்பது ஒரு வெட்டும் புள்ளி $\theta = 210^\circ$ ஆனால்

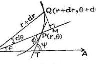
$$r = \sqrt{2} \cos 210^\circ = -\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$r^2 = \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\; r = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

எனவே $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 210^\circ)$ என்பது மற்றுமொறு வெட்டும் புள்ளி

2·8. ஆரைத்திசையில் (Radius vector) இருக்கும், தொடு கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் அல்லது ஒரு புள்ளியில் வளைகோட்டின் திசை.

கார்ட்டீஸியன் முறையில் ஒரு வளைகோட்டின் திசையை அளவிட ψ என்ற கோணத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். இங்கு ψ என்பது வளைகோட்டின் தொடுகோட்டிற்கும் X-அச்சிற்கும் இடையே உள்ள கோணம். இதேபோன்ற கோணத்தை போலார் வடிவில் கணக்கிடுவது அவ்வளவு எளிதல்ல. அதற்கு நாம் மற்றொரு கோணத்தைப் பயன்படுத்துவோம். அது ஆரைத் திசைக்கும், தொடுகோட்டிற்கும் இடையே இருக்கும் கோணம்: அதனை ϕ என்று குறிப்பிடுவோம்.



படம் 2·16

இங்கு $\psi = \theta + \phi$ என்பது புலனாகிறது. (25)

எனவே $\tan\psi = \tan(\phi + \theta) = \dfrac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \tan\phi\tan\theta}$

$$x = r\cos\theta;\; y = r\sin\theta$$

ஆனால் $\tan\psi = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \dfrac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta};\; r' = \dfrac{dr}{d\theta}$

இரண்டையும் சமமாக்க $\dfrac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \tan\phi\tan\theta} = \dfrac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$

$$= \frac{r'\tan\theta + r}{r' - r\tan\theta} = \frac{\tan\theta + \left(\frac{r}{r'}\right)}{1 - \tan\theta\left(\frac{r}{r'}\right)}$$

எனவே $\tan\phi = \frac{r}{r'} = \frac{r}{dr/d\theta}$

அல்லது

$$r\frac{d\theta}{dr} = \tan\phi = \frac{r}{r'} \qquad (26)$$

இதனையே படத்தின் (2·16) மூலமாகவும் காட்டலாம். $P(r, \theta)$, $\phi(r + dr, \theta + d\theta)$ என்பன இரண்டு அடுத்தடுத்த புள்ளிகள். $r = f(\theta)$ என்ற வளைகோட்டில் QM கோடு OPக்குக் குத்துக்கோடு PT என்பது P யில் தொடுகோடு.

$\angle CPT = \phi$; $\triangle OMQ$ என்பது செங்கோண முக்கோணம்.

$QM = (r + dr)\sin(d\theta)$; மற்றும் $OM = (r + dr)\cos(d\theta)$.

எனவே $PM = OM - OP = (r + dr)\cos(d\theta) - r$

$$= (dr)\cos(d\theta) - 2r\cdot\sin^2\left(\frac{d\theta}{2}\right)$$

$$\tan\angle QPM = \frac{QM}{PM} = \frac{(r + dr)\sin(d\theta)}{(dr)\cdot\cos(d\theta) - 2r\sin^2\left(\frac{d\theta}{2}\right)}$$

இப்பொழுது, வளைகோட்டின் மேலாக $Q \to P$ என்றால் $\angle QPM \to \phi$, $(d\theta)$, (dr); $\to 0$ என்றாகும்.

$$\text{எனவே } \tan\phi = \underset{(d\theta)\to 0}{Lt}\ \frac{(r + dr)\sin(d\theta)}{(dr)\cos(d\theta) - 2r\sin^2\left(\frac{d\theta}{2}\right)}$$

$$= \underset{(d\theta)\to 0}{Lt}\ \frac{(r + dr)\frac{\sin(d\theta)}{d\theta}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot\cos(d\theta) - 2r\cdot\sin^2\left(\frac{d\theta}{2}\right)\Big/ d\theta}$$

இப்பொழுது,

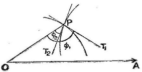
$$r + dr \to r \; ; \; \frac{\sin (d\theta)}{(d\theta)} \to 0 \; ; \; \frac{dr}{d\theta} \to \frac{dr}{d\theta} \; ; \; \cos (d\theta) \to 1$$

$$2 \sin^2 \frac{(d\theta/2)}{(d\theta)} = \frac{\sin^2 (d\theta/2)}{(d\theta/2)}$$

$$= \frac{\sin (d\theta/2)}{(d\theta/2)} \sin \left(\frac{d\theta}{2}\right) \to 1 \cdot 0 \to 0$$

ஆக $\tan \phi = \dfrac{r}{dr/d\theta} = r \dfrac{d\theta}{dr}$ என்று முன்போல வரும்.

§ 2·9. இருவளை கோடுகளிடையே உள்ள கோணம்.



படம் 2·17

இருவளைகோடுகள் P-ல் வெட்டட்டும். PT_1, PT_2 என்பவை முறையே இரு வளைகோடுகளுக்கும் தொடுகோடுகள் என்றும் கொள்வோம். $\angle T_2PT_1$ என்பதுதான் இருவளை கோடுகளிடையே உள்ள கோணம்.

$$\angle T_2 PT_1 = \phi_1 - \phi_2 = \theta \text{ (என்போம்)}$$

எனவே $\tan \theta = \dfrac{\tan \phi_1 - \tan \phi_2}{1 + \tan \phi_1 \tan \phi_2}$

2·10. வளைகோட்டுவில்லின் (Arc of a Curve) நீளம் காணுதல்.

$r = f(\theta)$ என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு.

$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$; $y = f(\theta)\sin\theta$ எனவருகிறது. வில்லின் நீளம் (கார்ட்டீஸியன் முறைப்படி) ds என்பது ; மற்றும் $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

இங்கு $dx = \cos\theta\,(dr) - r\sin\theta\,(d\theta)$;

$dy = \sin\theta\,(dr) + r\cos\theta\,(d\theta)$

எனவே

$$ds = \sqrt{[\cos\theta\, dr - r\sin\theta\cdot d\theta]^2 + [\sin\theta\cdot dr + r\cos\theta\cdot d\theta]^2}$$

$$= \sqrt{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(dr)^2 + (r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)(d\theta)^2}$$

$$= \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\theta)^2}$$

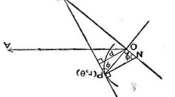
$r = f(\theta)$ என்பதிலிருந்து $dr = f'(\theta)\,d\theta = r'(d\theta)$

எனலாம். ஆக $ds = \sqrt{r^2 + (r'^2)}\cdot d\theta$ (27)

$$\text{அதாவது, } s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta \quad (28)$$

என்ற வாய்பாடு வளைகோடுகளின் நீளங்களைக் காண உதவும்.

2·11. போலார் தொடுகோட்டடி, போலார் செங்கோட்டடி.



படம் 2·18

PT என்பது வளைகோட்டின் தொடுகோடு; PN என்பது அதன் செங்கோடு. இப்பொழுது O (துருவம்) விலிருந்து OP-க்கு ஒரு குத்துக்கோட்டை வரைந்து அது PN-ஐ, N-புள்ளியிலும், PT-ஐ, T-என்ற புள்ளியிலும் கூடுகிறது என்போம். அப்பொழுது ON = போலார் செங்கோட்டடி; OT = போலார் தொடு கோட்டடி.

OPT என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து,

$$\tan\phi = \frac{OT}{OP} \qquad \therefore \quad OT = r\tan\phi = r\cdot r\frac{d\theta}{dr}$$

எனவே போலார் தொடுகோட்டடி $= r\tan\phi = r^2\dfrac{d\theta}{dr}$ (29)

ONP என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து,

$$\cot\phi = \frac{ON}{OP}\ . \qquad \because \quad ON = r\cot\phi = r\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)$$

எனவே, போலார் செங்கோட்டடி $= r\cot\phi = \dfrac{dr}{d\theta}$ (30)

குறிப்பு: PT என்பது போலார் தொடுகோட்டின் நீளம் என்றும்; PN என்பது போலார் செங்கோட்டின் நீளம் என்றும் கூறப்படும்.

2·12. துருவத்திலிருந்து தொடுகோட்டிற்கான குத்துக்கோடு

படம் 2·16—ல் துருவத்திலிருந்து PT-தொடுகோட்டிற்கு ஒரு குத்துக்கோடு வரைந்துள்ளது.

$p = r\sin\phi$. ஆகவே,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}^2\phi = \frac{1}{r^2}(\cot^2\phi + 1) = \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 1\right]$$

$$= \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}$$

எனவே, $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ என்று வருகிறது. (31)

து. மு. 1.

$r = f(\theta)$ என்பதிற்குப் பதிலாக $u = \frac{1}{r} = f(\theta)$ என்றவாறு வளைகோடு இருக்குமானால்,

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \text{ என்று வரும்} \tag{32}$$

2·13. போலார் சமன்பாடுகளில் தொடுகோடு, செங்கோடுகளைக் காணல்.

போலார் வடிவில் ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $r \cos(\theta - \alpha) = p$ என்று அமைகிறது என்பதனை § 2-4-ல் [சமன்பாடு (19)] கண்டோம். இதில் p என்பது துருவத்தினிலிருந்து குறித்த நேர் கோட்டின் குத்துக்கோட்டின் நீளம்; α என்பது அந்தக் குத்துக் கோடு தொடக்கக்கோட்டுடன் வெட்டும் கோணம்.

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{r'}$$

$p = r \sin\phi$; $\psi = \theta + \phi = \alpha + \frac{\pi}{2}$ என்ற சமன்பாட்டு களினால், $p = r \sin\phi$

$$\alpha = \theta + \phi - \frac{\pi}{2}; \; r\cos(\theta - \alpha) = p$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. இவைகளிலிருந்து p, ϕ களை நீக்க, தொடுகோட்டின் சமன்பாடு வரும்.

து. மு. 1.

ஒரு குறிப்பிட்ட $r = f(\theta)$ என்ற வளைகோட்டிற்குத் துருவத்தில் தொடுகோடுகளைக் கண்டு பிடித்தல்

துருவத்தில் $p = 0$. எனவே, $r\cos(\theta - \alpha) = 0$ அல்லது $r = 0$.

அதாவது $f(\theta) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் $\theta = \theta_0$ என்றால், அதுதான் துருவத்தில் $r = f(\theta)$ விற்கான தொடுகோட்டின் சமன்பாடு.

து. மு. 2.

செங்கோட்டின் சமன்பாடு. இங்கு p', α' என்பவை செங்கோட்டின் துணை அலகுகள் என்போம்.

அப்பொழுது $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$; $p'^2 = r^2 - p^2 = r^2 - r^2 \sin^2 \phi$

எனவே $p^1 = r \cos \phi$. அதாவது,

செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க

$p' = r \cos \phi$; $\alpha' = \theta + \phi$; $r \cos(\theta - \alpha') = p'$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து p', α' களை நீக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எ. கா. 1

$r = a \cos \theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைப் போலார் வடிவில் கண்டுபிடி.

$\theta = \frac{\pi}{4}$ என்றால் $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ஆகிறது.

வகையிட, $r' = -a \cos \theta = -\frac{a}{\sqrt{2}}$

எனவே $\tan \phi = \frac{r}{r'} = -1$ அல்லது $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

$\alpha = \theta + \phi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. எனவே $p = r \sin \phi = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{a}{2}$.

அதாவது $\frac{a}{2} = r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ அல்லது $a = 2 \; r \sin \theta$

என்பதுதான் தொடுகோடு.

எ. கா. 2.

$r = 3 \sin 2\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்குத் துருவத்திலுள்ளத் தொடுகோடுகள் யாவை ?

துருவத்தில் தொடுகோடுகளைக் காண, $r = f(\theta) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணவேண்டும்.

இங்கு $3 \sin 2\theta = 0$ அல்லது $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ......என்பவை மூலங்கள்.

எனவே, $\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, ...என்பவை தொடுகோடுகள். $\theta = 0$, $\theta = \pi$ என்ற இரண்டும், தொடக்கக் கோட்டைத்தான் குறிக்கின்றன. மற்றும் $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\theta = \frac{3\pi}{2}$ என்பவை யும் ஒரே நேர்கோட்டை — துருவத்தில் தொடக்கக் கோட்டிற்குக் குத்துக் கோட்டைக் குறிப்பிடுகின்றன.

அதாவது, குறித்த வளைகோட்டிற்கு $\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ என்ற இரு தொடுகோடுகள் துருவத்தில் உள்ளன. (படம் 2·10 பார்க்க).

எ. கா. 3.

$r = a + b \cos \theta$ என்ற வளைகோட்டிற்குத் துருவத்தில் தொடு கோடுகள், செங்கோடுகள் உள்ளனவா என்று கண்டுபிடி.

துருவத்தில் தொடுகோடுகளைக் காண,

$r = a + b \cos \theta = 0$. அல்லது $\cos \theta = -\frac{a}{b}$.

எனவே $a > b$ ஆனால் தொடுகோடுகள் இல்லை. $a \leq b$ என்றால் மட்டுமே தொடுகோடுகள் இருக்கும். அவைகளின் சமன்பாடு

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right) + 2k\pi;\ k \text{ ஒரு முழு எண்.}$$

அதாவது, $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$ என்ற ஒரு தொடுகோடுதான்;

செங்கோடு $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{\pi}{2}$ என்பதனை எளிதில் அறிய லாம்.

எ. கா. 4.

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $\theta = \frac{\pi}{6}$ என்ற புள்ளி யில் தொடுகோடு, செங்கோடுகளைக் கண்டுபிடி.

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்பதனை வகையிட,

$2rr' = -2a^2 \sin 2\theta$

எனவே $\tan\phi = \frac{r}{r'} = \frac{r^2}{rr'} = \frac{a^2 \cos 2\theta}{-a^2 \sin 2\theta} = -\cot 2\theta$

$= \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)$. அதாவது $\phi = \frac{\pi}{2} + 2\theta$

குறித்த புள்ளியான $\theta = \frac{\pi}{6}$-ல், $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $\phi = \frac{5\pi}{6}$.

ஆக $p = r\sin\phi = \frac{a}{2\sqrt{2}}$; $\alpha = \theta + \phi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

அல்லது $r\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{2}}$ என்றாகிறது.

அதே புள்ளியில் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கணக்கிடு வோம்.

$p'\ r\cos\phi = -\frac{-a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\alpha' = \theta + \phi = \pi$

எனவே செங்கோட்டின் சமன்பாடு [$r\cos(\theta - \alpha') = p'$ என்பதி லிருந்து] $r\cos\theta = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ என்று வருகிறது.

பயிற்சி

I. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குக் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் தொடுகோடுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

1. $r = 2(1-\cos\theta)$; துருவத்தில்
2. $r = a(1-\sin\theta)$; ,,
3. $r^2 = a^2 \sin\theta$; ,,
4. $r = a\tan\theta$; ,,
5. $r = a\sin 3\theta$; ,,
6. $r = a\sin n\theta$; ,,
7. $r = a(2-\sin\theta)$; ,,
8. $r = 6\cos\theta$; $\theta = \frac{\pi}{4}$
9. $r = 2(1-\cos\theta)$; $\theta = 2\frac{\pi}{3}$
10. $r = \frac{4}{1-\cos\theta}$; $\theta = \alpha$

II. மேலே குறிப்பிட்டுள்ள வளைகோடுகளுக்கு அதே புள்ளிகளில் செங்கோடுகள் எவை?

விடைகள்

I. 1. $\theta = 0$ 2. $\theta = \frac{\pi}{2}$ 3. $\theta = 0$ 4. $\theta = 0$

5. $\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{3}$; $\theta = \frac{2\pi}{3}$ என்ற மூன்று தொடுகோடுகள் 6. $\theta = 0$ மற்றும் $\theta = \frac{k\pi}{2n}$, k என்பது ஒரு முழு எண். 7. தொடுகோடு கிடையாது. 8. $r\sin\theta = 3$. 9. $r\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 10. $r\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$

II. 1. $\theta = \frac{\pi}{2}$. 2. $\theta = 0$ 3. $\theta = \frac{\pi}{2}$ 4. $\theta = \frac{\pi}{2}$

5. $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{5\pi}{6}, \theta = \frac{\pi}{6}$ 6. $\theta = \frac{\pi}{2}$ மற்றும்

$\theta = \frac{\pi k}{2n} + \frac{\pi}{2}$ 7. கிடையாது. 8. $r \cos \theta = 3$ 9. $r \cos \theta = 3$

10. $r \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cot \frac{\alpha}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}$

§ 2. 14. வளைகோட்டின் பாத-சமன்பாடு.

ஒரு வளைகோட்டின் P மற்றும் r-க்கு உள்ள தொடர்பைக் குறிக்கும் சமன்பாட்டை வளைகோட்டின் பாத-சமன்பாடு என்றழைக்கலாம்—அல்லது $(P\text{-}r)$ சமன்பாடு. பற்பல வளை கோடுகளுக்கு இந்த பாத-சமன்பாடு மிக எளிதாக அமைவதைக் காணலாம்.

$r = f(\theta)$ என்பது ஒரு வளைகோட்டின் போலார் சமன் பாடானால், $(P\text{-}r)$ அல்லது பாத-சமன்பாட்டை அறியக் கீழ்கண்ட சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

(i) $r = f(\theta)$

(ii) $\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr}$

(iii) $P = r \sin \phi$ (32)

இம் மூன்றிலிருந்து ϕ, θ என்பவற்றை விலக்க, நமக்கு $(P\text{-}r)$ சமன்பாடு கிட்டும்.

வளைகோட்டின் கார்ட்டீஸியன் சமன்பாடு $y = F(x)$ என்று இருந்தால், PT-இன் சமன்பாடு

$y - y_1 = F'(x)[x - x_1]$; $F'(x) = y'$ என்போம்.

$$\left.\begin{aligned} \text{எனவே } P &= \frac{-y_1 + x_1 y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ \text{மற்றும் } y_1 &= F(x_1) \\ r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (33)$$

இம் மூன்று சமன்பாட்டுகளிலிருந்து $x_1\ y_1$ விலக்க நமக்கு (P—r) சமன்பாடு அல்லது பாத—சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

எ. கா. 10

$r = 1 - \cos\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ϕ-ஐக் கண்டுபிடி.

$$r = 1 - \cos\theta;\quad \frac{dr}{d\theta} = r' = \sin\theta$$

$$\text{எனவே } \tan\phi = \frac{r}{r'} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\text{அல்லது } \phi = \frac{\theta}{2}$$

எ. கா. 11.

$r = 4\sin\theta;\ r\sin\theta = 3$ என்ற இரு வளைகோடுகளும் வெட்டும் கோணத்தைக் காண்.

$r = 4\sin\theta,\ r' = 4\cos\theta$ எனவே $\tan\phi_1 = \tan\theta$

அல்லது $\phi_1 = \theta$

$r\sin\theta = 3.\quad r' = -3\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$

$$\tan\phi_2 = \frac{r}{r'} = \frac{3\operatorname{cosec}\theta}{-3\operatorname{cosec}\theta\cot\theta} = -\cot\theta \text{ அல்லது}$$

$$\phi_2 = \frac{3\pi}{2} - \theta$$

இரண்டும் வெட்டும்பொழுது $r = 4 \sin \theta = \frac{3}{\sin \theta}$ அல்லது

$\sin^2 \theta = \frac{3}{4}$ ஆக $\theta = 60°$

எனவே, வெட்டும் புள்ளியில் $\phi_1 = 60°$; $\phi_2 = 120°$

ஆக வெட்டும் கோணம் $= 120° - 60° = 60°$

எ. கா 12

$r = a \sin 2\theta$, $r = b \cos 2\theta$ என்ற இரு வளைகோடுகளுக்கும் சாய்வு விகிதங்களைக் கண்டுபிடி. அதனிலிருந்தோ, வேறு வகையிலோ, இரு வளைகோடுகளும் வெட்டும் கோணத்தைக் காண்.

சாய்வு விகிதம் $= \tan \psi = \tan(\phi + \theta) = \frac{\tan \phi + \tan \theta}{1 - \tan \phi \tan \theta}$

இரண்டும் வெட்டும் பொழுது $a \sin 2\theta = b \cos 2\theta$

அல்லது $\tan 2\theta = \frac{b}{a}$.

$r = a \sin 2\theta$

$r' = 2a \cos 2\theta$; $\tan \phi = \frac{r}{r'} = \frac{a \sin 2\theta}{2a \cos 2\theta}$

$= \frac{1}{2} \tan(2\theta) = \frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

எனவே,

$$\tan \psi_1 = \frac{\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} + \tan \theta}{1 - \frac{\tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}} = \frac{\tan \theta (2 - \tan^2 \theta)}{(1 - 2 \tan^2 \theta)}$$

இங்கு, $\tan 2\theta = \frac{b}{a}$.

$r = b \cos 2\theta$

$r' = -2b \sin 2\theta$; $\tan \phi' = \frac{r}{r'} = \frac{b \cos 2\theta}{-2b \sin 2\theta}$

$= -\frac{1}{2} \cot(2\theta)$

$$\therefore \tan\phi' = \frac{\tan^2\theta - 1}{4\tan\theta}$$

எனவே,

$$\tan\psi_2 = \frac{\tan\theta + \dfrac{\tan^2\theta - 1}{4\tan\theta}}{1 - \dfrac{(\tan^2\theta - 1)}{4\tan\theta}\tan\theta} = \frac{5\tan^2\theta - 1}{\tan\theta\,(5 - \tan^2\theta)}$$

இங்கும் $\tan 2\theta = \dfrac{b}{a}$.

எனவே, இரண்டு வளைகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம்

$$= \phi_0 \sim \phi_0' = \tan^{-1}\left[\frac{\tan\phi - \tan\phi'}{1 + \tan\varphi\tan\phi'}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\dfrac{b}{2a} + \dfrac{a}{2b}}{1 - \dfrac{b}{2a}\cdot\dfrac{a}{2b}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2(b^2 + a^2)}{3ab}\right]$$

எ.க. 13.

$r = a\,\text{cosec}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $\dfrac{\pi}{3}$ யிலிருந்து $\dfrac{\pi}{2}$ வரையுள்ள நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

$$r = a\,\text{cosec}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$r' = 2a\,\text{cosec}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{-\text{cosec}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= -a\,\text{cosec}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(ds)^2 = r^2 + r'^2 = a^2 \text{cosec}^4 \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$+ a^2 \text{cosec}^4 \left(\frac{\theta}{2}\right) \cot^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= a^2 \text{cosec}^4 \left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \text{cosec}^2 \frac{\theta}{2} = a^2 \text{cosec}^6 \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \quad S = \int_{\pi/3}^{\pi/2} ds = \int_{\pi/3}^{\pi/2} a \cdot \text{cosec}^3 \left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta.$$

put $\frac{\theta}{2} = x \quad \therefore \quad d\theta = 2dx$ and the range of λ in the integration is $\frac{\pi}{6}$ to $\frac{\pi}{4}$. Using integration by parts, we get,

$$S = 2a \int_{\pi/6}^{\pi/4} \text{cosec}^3 x \, dx$$

$$= \frac{2a}{2} \left\{ -\cot x \,\text{cosec}\, x \right\}_{\pi/6}^{\pi/4} \left[-\log (\text{cosec}\, x + \cot x) \right]_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= -a \left\{ [\sqrt{2} - 2\sqrt{3}] + [\log (\sqrt{2}+1) - \log (2+\sqrt{3})] \right\}$$

$$= a \left\{ [2\sqrt{3} - \sqrt{2}] + [\log(2+\sqrt{3}) - \log (\sqrt{2}+1)] \right\}$$

$$= a \left\{ \left[(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \log \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} \right) \right] \right\}$$

எ.கா 14

$r = a^{\theta}$ என்ற வளைகோட்டிற்குப் போலார் செங்கோட்டடியையும், போலார் தொடுகோட்டடியையும் காண்க.

$$r = a^{\theta}; \quad \frac{dr}{d\theta} = a^{\theta} \log a$$

போலார் தொடுகோட்டடி $= r^2 \dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{r^2}{a^{\theta} . \log a} = \dfrac{a^{2\theta}}{a^{\theta} \log a}$

$$= \frac{a^{\theta}}{\log a}$$

போலார் செங்கோட்டடி $= \dfrac{dr}{d\theta} = a^{\theta} \log a.$

எ. கா. 15

லெம்னிஸ்கேட்டின் பாத-சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்பது லெம்னிஸ்கேட்டின் சமன்பாடு. வகையெடுக்க.

$$2 \cdot r' = -a^2 \cdot 2 \sin 2\theta; \quad r' = \frac{-a^2 \sin 2\theta}{r}$$

$$\tan \phi = \frac{r}{r'} = \frac{r^2}{-a^2 \sin 2\theta} = -\cot 2\theta$$

எனவே $\phi = \dfrac{\pi}{2} + 2\theta$

$p = r \sin \phi = r \sin \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\theta\right) = r \cos 2\theta$ அல்லது

$p = r . \dfrac{r^2}{a^2}$. ஆக $a^2 p = r^3$ என்பதுதான் பாத-சமன்பாடு

§ 2·15. பாத- வளை கோடுகள் (Pedal Curves)

O என்ற நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து (Fixed point), $F(r, \theta) = 0$ என்ற வளைகோட்டின் மாறும் ஒரு தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோடு ஒன்றை வரைவோம். அதன் பாதம் அல்லது அடியின் நியமப்பாதையை, வளைகோட்டின் O-ஐச் சார்ந்த "முதல் மிகைப் பாத-வளைகோடு" என்கிறோம். இந்த முதல் மிகைப் பாத வளை

கோட்டின் மிகைப் பாத-வளைகோட்டை, தொடக்க வளைகோட்டின் இரண்டாம் மிகைப் பாத-வளைகோடு என்கிறோம். இவ்வாறே மற்ற மிகைப் பாத-வளைகோடுகளை வரையறுக்கலாம்.

O விலிருந்து (துருவத்திலிருந்து) $F(r, \theta) = O$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோட்டிற்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோட்டின் அடியின் ஆயத்தொலைகளை (r', θ') என்போம். அப்பொழுது (r', θ')-ன் நியமப்பாதைதான் துருவத்தைச் சார்ந்த முதல் மிகைப் பாத-வளைகோடு.

$$\text{இங்கு } \phi = \frac{\pi}{2} + \theta' - \theta \qquad \text{... (i)}$$

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} \qquad \text{... (ii)}$$

$$p = r' = r\sin\phi \qquad \text{... (iii)}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \qquad \text{... (iv)}$$

இந்நான்கு சமன்பாடுகளிலிருந்து r, θ, ϕ என்பவைகளை நீக்கினால் நமக்கு கிடைப்பது r', θ' அடங்கிய ஒரு சமன்பாடு. இதில் $r' = r, \theta' = \theta$ என்று பிரதியிட்டால் கிடைக்கும் சமன்பாடு முதல் மிகைப் பாத-வளைகோட்டைக் கொடுக்கும். சமன்பாடு கார்ட்டீஸியன் வடிவத்திலிருந்தால் :—

$$F(x, y) = 0 \text{ வளைகோட்டின்வடிவம்.} \qquad \text{... ... (i)}$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad \text{... ... (ii)}$$

என்பது தொடுகோடானால், p என்பது 0 என்ற ஆதியிலிருந்து வரைந்தக் குத்துக் கோடு; மற்றும் அது x-அச்சுடன் α என்ற கோணத்தில் நிலைத்துள்ளது. எனவே அதன் பாதத்தின் போலார் கூறுகள் (p, α) என்போம்.

$$\text{எனவே } (y - y_1) = \frac{-F_x}{F_y}(x - x_1) \qquad \text{... (iii)}$$

(i), (ii), (iii) என்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து (x, y)களை நீக்கினால் (p, α) களுக்கான ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கும். அதில் $p = r, \alpha = \theta$ என்று பிரதியிட, முதல் மிகைப் பாத-வளைகோட்டைக் காணலாம்.

எ. கா. 16.

$r = a\, e^{\theta \cot \alpha}$ என்ற சுருளின் முதல் மிகைப் பாத-வளை கோட்டைக் கண்டு பிடித்து, nபாத-வளை கோட்டையும் காண்.

$$r = a\, e^{\theta \cot \alpha}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = a\, e^{\theta \cot \alpha} \cdot (\cot \alpha) \quad \therefore \quad \tan \phi = r\frac{d\theta}{dr} = \tan \alpha$$

அல்லது $\phi = \alpha$

எனவே, $\phi = \alpha = \frac{\pi}{2} + \theta' - \theta$

அல்லது $\theta = \frac{\pi}{2} + \theta' - \alpha$ ... (i)

மற்றும் $r' = r \sin \phi = r \sin \alpha$ · எனவே $r = \frac{r'}{\sin \alpha}$ ... (ii)

இவ்விரண்டினையும் $r = a\, e^{\theta \cot \alpha}$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$\frac{r'}{\sin \alpha} = a\, e^{\cot \alpha \left(\frac{\pi}{2} + \theta' - \alpha\right)}$$

$$r' = (a \sin \alpha)\, e^{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cot \alpha}\, e^{\theta' \cot \alpha} = A e^{\theta' \cot \alpha}$$

எனவே முதல் மிகைப் பாத-வளைகோடும் அதே வகையைச் சார்ந்த சுருளியாகும்.

$$A = a \sin \alpha \; e^{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cot \alpha}$$

இரண்டாம், மூன்றும் ...... மிகை பாத-வளை கோடுகளும் அதேவகை சுருளிகளே என்பது தெளிவு.

எ. கா. 17

$x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ என்ற வளைகோட்டின் முதல் மிகைப் பாத-வளை கோடு $r = \pm a\sin\theta\cos\theta$ என்று காண்பி.

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்பது தான் வளைகோட்டின் சமன்பாடு.

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$-என்பது இதன் தொடுகோடு என்போம்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(dy/d\theta)}{(dx/d\theta)} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$$

ஆக, தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - a\sin^3\theta = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}(x - a\cos^3\theta)$$

$$y\cos\theta + x\sin\theta = a\sin^3\theta\cos\theta + a\cos^3\theta\sin\theta$$

$$= a\sin\theta\cos\theta$$

இக்கோட்டின் மேல் ஆதியிலிருந்து செங்குத்துவரைந்தால் அதன் நீளம்

$$p = \frac{\pm a\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = \pm a\sin\theta\cos\theta$$

இந்தத் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= -\tan\theta$$

$\left.\begin{array}{l} x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \\ \text{என்பதன் சாய்வு விகிதம்} \end{array}\right\} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

இந்த மதிப்பை *-ல் பிரதியிட

$$p = \pm a \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$$

அல்லது $p = \pm a \sin \alpha \cos \alpha$ என்று வருகிறது. $p = r$, $\alpha = \theta$ என்று பிரதியிட, முதல் மிகைப் பாத-வளைகோட்டின் போலார் வடிவம் $r = \pm a \sin \theta \cos \theta$ என்றாகிறது.

எ. கா. 18

k-படி மிகைப் பாத-வளைகோட்டினை $r^m = a^m \cos m\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்குக் கண்டு பிடித்து, அதுவும் குறித்த வளைகோட்டின் வகையைச் சார்ந்தது என்று நிரூபி.

$r^m = a^m \cos m\theta$

லாகரிதம் எடுக்க $m \log r = \log \cos (m\theta) + m \log a$

வகையிட்டால். $\dfrac{m}{r} \cdot \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{-m \sin m\theta}{\cos (m\theta)}$.

எனவே, $\dfrac{1}{r} \dfrac{dr}{d\theta} = -\tan (m\theta) = \cot \phi$

எனவே, $\phi = \dfrac{\pi}{2} + m\theta$ என்றாகிறது.

$\therefore \quad \theta = \theta' + \dfrac{\pi}{2} - \phi = \theta' - m\theta$ அல்லது $\theta = \dfrac{\theta'}{m+1}$

மற்றும் $r' = r \sin \phi$

அல்லது $r = \dfrac{r'}{\sin \phi} = \dfrac{r'}{\sin \left(\dfrac{\pi}{2} + m\theta \right)}$

$\therefore \; r = \dfrac{r'}{\cos m\theta}$ இவையிரண்டையும் $r^m = a^m \cos m\theta$-வில்

பிரதியிட $\left(\frac{r'}{\cos m\theta}\right)^m = a^m \cos\left(\frac{m\theta'}{m+1}\right)$

அல்லது $r'^m = a^m \left[\cos\left(\frac{m\theta'}{m+1}\right)\right]^{m+1}$

ஆக $$(r')^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \cdot \cos\left(\frac{m}{m+1}\theta'\right) \quad (35)$$

என்பது $r^m = a^m \cos m\theta$ என்பதன் முதல் மிகைப் பாத-வளை கோடு. எனவே இரண்டாம் மிகைப் பாத-வளைகோடு

$$(r'')^{\frac{m'}{m'+1}} = a^{\frac{m'}{m'+1}} \cos\left(\frac{m'}{m'+1}\theta''\right); \quad m' = \frac{m}{m+1}$$

என்பதாம்.

அதாவது $\frac{m'}{m'+1} = \frac{m/m+1}{\frac{m}{m+1}+1} = \frac{m}{2m+1}$

ஆக இரண்டாம் மிகைப் பாத-வளைகோடு

$$(r'')^{\frac{m}{2m+1}} = a^{\frac{m}{2m+1}} \cos\left(\frac{m}{2m+1}\theta''\right) \quad (36)$$

இவ்வாறே கணக்கிட்டால் K-படி மிகைப் பாத-வளை கோட்டின்

சமன்பாடு : $$r^{\frac{m}{km+1}} = a^{\frac{m}{km+1}} \cos\left(\frac{m}{km+1}\theta\right) \quad (37)$$

இவைகளை எல்லாம் [(35), (36), (37)] கொடுக்கப்பட்ட $r^m = a^m \cos m\theta$ என்ற வளைகோட்டின் வகையைச் சார்ந்தவைகளே.

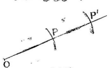
குறிப்பு : முதல் மிகைப் பாத-வளை கோட்டிலிருந்து நோக்கினால், கொடுக்கப்பட்ட வளை கோடு, முதல் குறைப் பாத-வளை கோடாகும். மேற்கூறிய எடுத்துக் காட்டில்

$$r^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \cos\left(\frac{m\theta}{m+1}\right)$$ என்ற வளை கோட்டின்

முதல் குறைப் பாத-வளை கோடு $r^n = a^n \cos m\theta$ என்பதாகும்.

2.16 தன்மாற்று வரைகள் அல்லது தன்மாற்று வளைகோடுகள் (Inverse Curves)

O என்பது துருவம், K என்பது O-வை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் ஆரை என்போம். OP என்ற நேர்கோட்டின் மேல் P' என்ற மற்றொரு புள்ளியை $OP \cdot OP' = K^2$ என்ற அளவில் எடுத்துக் கொள்வோம். அப்பொழுது P' என்பது P-இன் தன்மாற்று (Inverse) எனப்படும். P- என்பது P'-ன் தன்மாற்று என்பது தெளிவு.



படம் 2.19

P- என்பது ஒரு நியமப்பாதையில் செல்லுமானால், P'- என்பதும் மற்றொரு நியமப் பாதையில் செல்லும். இவ்விரண்டு பாதைகளைத் " தன்மாற்று வளைகோடுகள் " என்கிறோம். சாதாரணமாகத் தன்மாற்று மையமான O- என்பது துருவமாகவோ, ஆதியாகவோ தான் இருக்கும். K-ன் மதிப்பு எவ்வாறிருப்பினும் வளை கோடுகளின் தன்மை மாருது.

எடுத்துக் காட்டாக, $r = a \cos \theta$ என்ற வளைகோட்டின் தன்மாற்றைக் கணக்கிடுவோம்.

O, P, P' என்பவை ஒரே நேர்க்கோட்டிலுள்ளதால், P'-ன் போலார் கூறுகள் $\left(\frac{k^2}{r}, \theta\right)$ என்பனவாம்.

எனவே P'-ன் நியமப்பாதை

$$\frac{k^2}{r} = a \cos \theta.$$ என்பதாகும்.

பொதுவாக, $f(r,\theta)=0$ என்பது ஒரு குறித்த வளைகோடானால், அதன் தன்மாற்று வளைகோட்டின் சமன்பாடு $f\left(\frac{k^2}{r}, \theta\right) = 0$ என்பதாகும். தன்மாற்று மையம்—துருவம்.

எ. கா 19

$r^m = a^m \cos m\theta$ என்பதின் தன்மாற்று வளைகோட்டினைக் கண்டுபிடி. m-ன் பலவேறு மதிப்புகளுக்குக் கிடைக்கும் முடிவுகளைத் தெரிவி.

$r^m = a^m \cos m\,\theta$. தன்மாற்று வளைகோட்டின் சமன்பாடு :-

$\frac{k^{2m}}{r^m} = a^m \cos m\,\theta$ அல்லது $r^m \cos m\theta \cdot a^m = k^{2m}$

$k = a$ என்று வைத்தால் [தன்மாற்று வட்டத்தின் ஆரை $= a$ ஆனால்] $r^m \cos m\theta = a^m$ என்பது தான் தன்மாற்று வளைவு. m-ன் பல வேறு மதிப்புகளைக் காண்போம் :

$m = 1$

வளைகோடு : $r = a\cos\theta$. இது ஒரு வட்டம். தன்மாற்று வளைகோடு : $r\cos\theta = a$, இது ஒரு நேர்கோடு. எனவே, நேர்கோடும், வட்டமும் தன்மாற்ற வளைவுகள்.

$m = 2$

வளைகோடு : $r^2 = a^2 \cos 2\,\theta$. இது ஒரு லெம்னிஸ்கேட். (பார்க்க எ. கா. 6)

தன்மாற்றம் : $r^2 \cos 2\,\theta = a^2$, இது ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவு.

$$\left[r^2 = x^2 + y^2;\ \cos 2\,\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} \right.$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$ எனவே $r^2 \cos 2\theta = a^2$

என்பது $x^2 - y^2 = a^2$ என்றாகிறது. இது ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவு]

$m = -2$

வளைகோடு செவ்வக அதிபர வளைகோடாகவும், தன்மாற்றம் லெம்னிஸ் கேட்டாகவும் அமையும்.

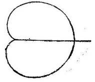
$m = -1$ ஆனால்,

வளைகோடு நேர்கோடாகவும், தன்மாற்றம் ஒரு வட்டமாகவும் அமையும்.

$m = \frac{1}{2}$

வளை கோடு $r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ அல்லது

$r = \frac{a}{2}(1 + \cos\theta)$ இது ஒரு நெஞ்சுவளை எனப்படும் வளைகோடு. அதன் தோற்றம்



படம் 2·20

இதன் தன் மாற்றம் : $r^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}}$ அல்லது

$$r(1 + \cos\theta) = 2a$$

$\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$ எனவே இது $e = 1$ என்ற கூம்பு வளைவு அல்லது பர வளைவு.

ஆக, பர வளைவும் நெஞ்சு வளையின் தன் மாற்றம்.

$m = -\frac{1}{2}$ என்றால், பர வளைவின் தன்மாற்றம் நெஞ்சு வளை என்று வரும்.

§ 2. 17 மற்ற வகை தொடர்பான வளை கோடுகள்

A. உள்ளீட்டுச் சமன் பாடுகள் (Intrinsic Equations)

ஒரு வளை கோட்டின் நீளம் s - க்கும், அந்த நீளத்தின் இரு முனைகளிலுள்ள தொடு கோடுகளிடையேயுள்ள கோணம் ψ-க்கும் உள்ள சம்பந்தத்தை (தொடர்பைக்) குறிப்பிடும் சமன் பாட்டிற்கு உள்ளீட்டுச்சமன்பாடு என்று பெயர். அதாவது "வெளி" யிலிருந்து அச்சுத் தூரங்கள், துருவங்கள் என்று எடுக்காமல், வளை கோட்டின் "உள்ளே" யுள்ள s - ψ என்ற தொகுதி களிடையே உள்ள தொடர்பைக் கணக்கிடுவதால் இதற்கு இவ் வாறு பெயர் அமைந்தது.

கார்ட்டீஸியன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$y = F(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைகோடு

$$\tan\psi = F'(x)$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+[F'(x)]^2} \quad \text{அல்லது} \quad s = \int \sqrt{1+[F'(x)]^2}\, dx$$

இவைகளிலிருந்து x, y ஐ நீக்கிவிட்டால் கிடைக்கும் சமன்பாடு தான் (s—ψ) சமன்பாடு அல்லது உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு.

எ. கா: 20.

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் உள்ளீட்டுச் சமன் பாட்டைக் கணக்கிடுவோம்.

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$-\frac{x}{y} = \tan\psi \text{ எனவே } \sec^2\psi = 1+\tan^2\psi = \frac{x^2+y^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{a}{y} \quad \text{அல்லது} \quad s = a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\cos\psi = \frac{y}{a} \quad \text{மற்றும்} \quad \tan\psi = -\frac{x}{y}$$

எனவே $\sin\psi = \cos\psi\tan\psi = \frac{x}{a}$ ஆக

$$\psi = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{முடிவாக,}$$

$s = a\,\psi$ என்பதுதான் வட்டத்தின் உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு.

(B) தொடுகோட்டு முனைவுச் சமன்பாடு

p-க்கும் ψ-க்கும் உள்ள சமன்பாட்டை இவ்வாறு குறிப்பிடு கிறுர்கள்

(C) தலைகீழ் முனைவுக்கோடு அல்லது போலார் ரெஸிப்ரோகல் வளைகோடு (Polar Reciprocal)

முதல் மிகைப்பாத-வளைகோட்டின் தன்மாற்ற வளைகோட்டைக் குறித்த வளைகோட்டின் போலார் ரெஸிப்ரோகல் வளைகோடு என்கிறுர்கள்

எ. கா. 21

$A x^2 + B y^2 = 1$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோட்டு முனைவுச் சமன்பாட்டை நிறுவுக.

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx} = -\frac{Ax}{By}$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - y_1) = -\frac{Ax_1}{By_1}(x - x_1)$$

$$\text{எனவே } p = \frac{\pm \frac{1}{By_1}}{\sqrt{1 + \frac{(Ax_1)^2}{(By_1)^2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 x_1^2 + B^2 y_1^2}}$$

$$\tan \psi = -\frac{Ax}{By} \text{ ஆதலால் } \cos^2 \psi = \frac{1}{1 + \tan^2 \psi} = \frac{B^2 y^2}{A^2 x^2 + B^2 y^2}$$

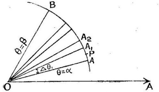
$$\sin^2 \psi = \tan^2 \psi \cos^2 \psi = \frac{A^2 x^2}{A^2 x^2 + B^2 y^2}$$

$$\text{எனவே } \frac{\cos^2 \psi}{B} + \frac{\sin^2 \psi}{A} = \frac{Ax^2 + By^2}{A^2 x^2 + B^2 y^2} = \frac{1}{A^2 x^2 + B^2 y^2} = p^2$$

ஆக கொடுக்கப்பட்ட நீள் வளையத்தின் தொடுகோட்டு முனைச் சமன்பாடு

$$P^2 = \frac{\sin^2 \psi}{A} + \frac{\cos^2 \psi}{B} \text{ என்பதாகும்.}$$

§ 2. 18. போலார் முறையில் வளைகோடுகளின் பரப்பைக் காணுதல்



படம் 2.21

BA என்பது ஒரு வளை கோட்டின் பகுதி. $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ என்ற இரண்டு நேர்கோடுகளிடையே இது அடங்கியுள்ளது. OAB எனற வடிவத்தின் பரப்பை கண்டு பிடிப்பதே நம் நோக்கு.

இந்தப் பரப்பை n-பாகங்களாகப் பிரிப்போம்; ஒவ்வொரு பாகத்தின் கோணமும் $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2, \ldots \Delta\theta n$ என்றிருக்கட்டும். P என்பது முதல் பாகத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி. $OP = r_1$ என்றால் OAA_1 என்ற பகுதியினை ஒரு வட்டத்துண்டு (Sector) ஆகக் கொள்ளலாம். எனவே அதன் பரப்பு $= \frac{1}{2} r_1^2 \ (\Delta \theta_1)^2$. இப்படியே மற்றப் பகுதிகளின் பரப்புகளையும் கணக்கிட

$$S_n = OAB\text{-யின் தோராயப் பரப்பு}$$
$$= \tfrac{1}{2} r_1^2 (\Delta\theta_1)^2 + \tfrac{1}{2} r_2^2 (\Delta\theta_2)^2 + \cdots + \tfrac{1}{2} r_n^2 \ (\Delta\theta_n)^2$$

இப்பொழுது n-என்பது அதிகரித்துக் கொண்டே போகுமாறும் மிகப் பெரிதான $\Delta\theta_k$ என்பது குறுகிக் கொண்டே போகுமாறும், S_n-ன் எல்லையைக் கணக்கிட

$$S_n = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

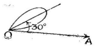
என்ற முடிவு கிடைக்கும்.

$$\text{எனவே } OAB\text{-ன் பரப்பு} = A = \tfrac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta \qquad (35)$$

எ. கா. 22.

மூன்றிதழ் உள்ள $r = \sin 3\theta$ என்ற கோட்டின் மொத்தப் பரப்பைக் கண்டுபிடி.

மூன்று இதழ்களும் சமபரப்புள்ளன. மற்றும் ஒவ்வொரு இதழும் நடுக்கோட்டோடுச் சமச்சீராகவுள்ளதால், ஒரு இதழின் அரைப் பங்குப்பரப்பைக் கண்டால் போதும். ஒரு இதழ் மட்டும் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 2·22

எனவே மொத்தப் பரப்பு $= 6 \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = 3 \int_0^{\pi/6} \sin^2 3\theta \, d\theta$

$= \frac{1}{4} \pi$

பயிற்சி 11—2

கீழ்கண்ட நேர்க்கோடுகளுக்குப் போலார் சமன்பாட்டு அமைப்பைக் கண்டுபிடி :—

1. $(3, 90°)$ என்ற புள்ளியினூடே செல்லும் கிடைக்கோடு.
2. $(-5, 0)$,, ,, ,, நிலைக்குத்துக்கோடு
3. $r = 4$ என்ற வட்டத்திற்கு $(4, 60°)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு
4. $r = \dfrac{2}{2 \sin\theta + \cos\theta}$
5. $r = \dfrac{-6}{3 \cos\theta + 2 \sin\theta}$
6. $r = \dfrac{3}{6 \sin\theta - \cos\theta}$

7. கீழ்க்கண்ட வட்டங்களின் மையப் புள்ளிகள் எவை ?

(a) $r = 6\cos\theta$; (b) $r = 10\sin\theta$; (c) $r = -8\sin\theta$ வட்டங்களின் ஆரைகளின் மதிப்பு என்ன ?

8. (i) $r = \dfrac{6}{1-\cos\theta}$; (ii) $r = \dfrac{4}{1+\sin\theta}$;

(iii) $r = \dfrac{12}{1-2\cos\theta}$; (iv) $r = \dfrac{15}{3+7\sin\theta}$ என்ற கூம்புவளைவுகளின் படங்களை வரைக.

9. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளிகள் எவை?

(a) $r=4\cos\theta$, $r\cos\theta=2$; (b) $r=6\sin\theta$, $r=6\cos 2\theta$;

(c) $r=1+\cos\theta$, $r=1-\cos\theta$; (d) $r=\dfrac{2}{1-\sin\theta}$; $r=\dfrac{2}{3\sin\theta}$;

(e) $r=\sin\theta+\cos\theta$, $r=2\sin\theta$; (f) $r=a\theta$, $r=\dfrac{a}{\theta}$;

(g) $p^2\sin 2\theta = a^2$, $p^2\cos 2\theta = b^2$.

10. சாய்வு விகிதங்களைக் கண்டுபிடி :

(i) $r = a(1-\cos\theta)$, $\theta = \pi/2$ புள்ளியில்;

(ii) $r = a\sec^2\theta$, $r = 2a$ புள்ளியில்;

(iii) $r = 3+2\sin\theta$, $(4, \pi/6)$ புள்ளியில்;

(iv) $r = a\sin 3\theta$, ஆதியில்;

(v) $r = a\sin 2\theta$, $\theta = \pi/4$ புள்ளியில்;

(vi) $r^2 = a^2\cos 2\theta$, $\theta = \pi/6$ என்ற புள்ளியில்;

(vii) $p = a\sin 4\theta$, ஆதியில்;

(viii) $r = a^{\theta}$, $\theta = \pi/2$ புள்ளியில்.

11. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்குக் கோணத்தைக் காண்க :

(a) $r^2 = a^2\cos 2\theta$; (b) $r = a(1-\cos\theta)$; (c) $r = ae^{b\theta}$;

(d) $r^m = a^m\cos m\theta$; (e) $r^m = a^m(\cos m\theta + \sin m\theta)$

12. குறிப்பிடப்பட்ட வளைகோடுகளின் வெட்டும் கோணம் என்ன ?

(a) $r = a(1 + \cos\theta)$, $r = b(1 - \cos\theta)$;

(b) $r\cos\theta = 2a$, $r = 5a\sin\theta$;

(c) $r = \sin\theta + \cos\theta$, $r = 2\sin\theta$

(d) $r^2 = a^2\cos 2\theta$, $r = a(1 + \cos\theta)$

(e) $r = a\theta$, $r\theta = a$

(f) $r = a\operatorname{cosec}^2(\theta/2)$, $r = b\sec^2(\theta/2)$

(g) $r^2\sin 2\theta = 4$, $r^2 = 16\sin 2\theta$

(h) $r = a\sin\theta$, $r = a\sin 2\theta$

(i) $r\sin\theta = 2a$, $r = a\sec^2(\theta/2)$

(j) $r^2\sin 2\theta = a^2$, $r^2\cos 2\theta = b^2$

(k) $r = a\sin 2\theta$, $r = b\cos 2\theta$

(l) $r = a\sin\theta$, $r = \cos 2\theta$

(m) $r = 2\sin\theta$, $r = 2\cos\theta$

(n) $r = a\sec^2(\theta/2)$, $r = b\operatorname{cosec}^2(\theta/2)$

(o) $r^m = a^m\cos m\theta$, $r^m = a^m\sin m\theta$

(p) $r = \dfrac{a}{1 + \cos\theta}$, $r = \dfrac{b}{1 - \cos\theta}$

(q) $r = a\sin 2\theta$. $r = a\cos 2\theta$

13. $r^n = a^n\sec(n\theta + \alpha)$; $r^n = b^n\sec(n\theta + \beta)$ என்ற இருவளைகோடுகளுக்கான வெட்டும் புள்ளிகளின் மதிப்பு a மற்றும் b மதிப்புகளைச் சாராததாயிருக்கும் ; நிரூபி.

14. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்கிற நெஞ்சுவளைக்குத் தொடு கோடு தொடுகோட்டிற்கு இணையாயிருக்கும்பொழுது, அதன் தொடும் புள்ளி, துருவத்தினின்று $\frac{3a}{2}$ தூரத்தில் இருக்கும் என்று நிரூபி.

15. $r\theta = a$ என்ற வளைகோட்டிற்கும், $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r}{k}\right)$ $- \sqrt{\frac{k^2-r^2}{r^2}}$ என்ற வளைகோட்டிற்கும் போலார் தொடு

கோட்டடியின் நீளம் மாறிலிகள் என்று காட்டு; அதேபோலவே $r^{-1} = A\theta + B$ என்பதற்கும் மற்றும் $r\theta = a$, காண்க.

16. $R = a\theta$ எனும் வளைகோட்டிற்குச் செங்கோட்டடி ஒரு மாறிலி என்று காட்டு.

17. குறிப்பிட்ட வளைகோடுகளுக்குப் போலார் தொடுகோட்டடியின், மற்றும் போலார் செங்கோட்டடியின் நீளங்களைக் கண்டுபிடி :

(i) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$; (ii) $r = a\theta$;

(iii) $r = a^{\theta}$; (iv) $r \cos 2\theta = a$ (v) $r = a e^{\theta \cot \alpha}$

18. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குப் போலார் தொடுகோட்டினுடைய மற்றும் போலார் செங்கோட்டினுடைய நீளங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(a) $r = a\theta$; (b) $r = f(\theta)$;

(c) $r = a^{\theta}$ (d) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

19. $r = a \cos 2\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $\theta = \frac{\pi}{6}$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு வரைந்தால் அது தொடக்கக் கோட்டை துருவத்தினின்று $a/\sqrt{3}$ தூரத்தில் வெட்டும் என்று காண்பி.

20. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்பதின் $\theta = 2\alpha$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு, அதே வளைகோட்டை மறுபடியும் $\theta = 2\beta$ என்ற புள்ளியில் சந்தித்தால் $\cos(2\beta - \alpha) + 2\cos\alpha = 0$ என்று காட்டு.

21. $r^m = a^m \cos m\theta$ என்ற வளைகோட்டின் செங்கோடு, தொடக்கக் கோட்டுடன் $(m + 1)\theta$ என்ற கோணத்தில் அமைகிறது என்று நிரூபி·

22. $r = a(1 - \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளை கோட்டில், P, Q என்ற இரண்டு புள்ளிகளில் தொடுகோடுகள் இணைகோடுகள். O என்பது துருவமானால் $\angle POQ = 2\pi/3$ என்று காட்டுக.

23. $r = f(\theta)$ என்ற வளைகோட்டின் போலார் செங்கோட்டடியின் முனைப் புள்ளியின் நியமப்பாதை $r = f'(\theta - \pi/2)$ என்று நிறுவு. எனவே $r = ae^{m\theta}$ என்ற சமகோணச் சுருளின் இது போன்ற நியமப்பாதை மற்றுமொறு சமகோணச் சுருள் என்று காட்டு.

24. $\frac{1}{r} + f(\theta) = 0$ என்கிற வளைகோட்டின் போலார் தொடுகோட்டடியின் முனைப்புள்ளி (Extremity of Polar Subtangent) யின் நியமப்பாதையின் சமன்பாடு

$\frac{1}{r} = f'(\pi/2 + \theta)$ என்று அமையும் என்று காட்டி,

அதனை $r = \frac{1 + \tan(\theta/2)}{m + n \tan(\theta/2)}$ என்ற வளை கோட்டிற்குப் பொருத்தி, நியமப்பாதை ஒரு நெஞ்சுவளை என்று நிரூபி.

25. கீழ்கண்ட வளைகோடுகளுக்கு p-ஐக் கண்டு பிடி :

(i) $r = \frac{a \cdot e^{\theta}}{(1+\theta)^2}$ (ii) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

(iii) $r = a\theta$. (iv) $r^n = a^m \cos m\theta$.

26. கீழ்கண்ட வளைகோடுகளின் பாத சமன்பாடுகளைக் காண்.

(a) $r = \frac{a}{\theta}$. (b) $r = a \cdot e^{\theta \cdot \cos \alpha}$ (c) $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

(d) $r = a(1 - \cos\theta)$ (e) $r = a \sin m\theta$. (f) $r = a + b \cos\theta$

(g) $r^m = a^m \cos m\theta$ அல்லது $r^n = a^m \sin m\theta$.

(h) $r^n = a^n \sin n\theta + b^n \cos n\theta$ (i) $r\left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 = a$.

(j) $r^2 \cos 2\theta = a^2$.

27. $r = a(1 - \cos\theta)$ என்ற வளைகோட்டில் p என்பது $(\sqrt{r})^3$ என்பதின் நேர்விகிதம் என்று காட்டு.

28. $r = a \operatorname{sech} (n\theta)$ என்ற வளைகோட்டின் பாத சமன்பாடு

$$\frac{1}{p^2} = \frac{A}{r^2} + B. \text{ என்று காட்டு.}$$

29. $p = \dfrac{r^3}{a^2}$ என்பது பாத சமன்பாடானால், வளைகோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

30. $r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு

$$a^{2n} \frac{d^2s}{ds^2} + n\, r^{2n-1} = 0 \text{ என்று நிரூபி.}$$

$r = 2$ என்று பொருத்தினால் $\dfrac{ds}{d\theta} = \dfrac{a^2}{r}$ என்று காட்டு.

31. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குக் குறிப்பிட்டபடி வளைகோடுகளின் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

(a) $r(1 + \cos\theta) = 2a$; $\theta = 0$ விலிருந்து $\theta = \pi/2$ வரையில்

(b) $r = a \sec^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$; $\theta = 0$ விலிருந்து $\theta = \pi/3$ வரை

(c) $r = 1 + \cos\theta$ முழு நீளத்தையும்

(d) $r = a(1 + \cos\theta)$,,

(e) $r(1 + \cos\theta) = 2a$, செவ்வகலத்தினால் (latus rectum) வெட்டப்பட்ட நீளம்.

(f) $r = a \cdot e^{\theta \cos \alpha}$; ஆரை $r = r_1$, $r = r_2$ களிடையே

(g) $r = a \cdot \cos^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$ (h) $r = 4 \sin\theta + 3 \cos\theta$.

(i) $r = 2a \tan\theta \sin\theta$; $\theta = 0$ விலிருந்து $\theta = \pi/4$ வரை.

(j) $r = a\theta$. துருவத்திலிருந்து முதல் சுற்று (Revolution) முடியும் வரை.

(k) $r = a \sin^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$.

32. $\theta = F(r)$ என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடானால்

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r_2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1}\, dr$$ என்று காட்டு.

இதனைப் பயன்படுத்தி $r\theta = a$ என்ற வளைவின் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

33. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவிற்கு உச்சியைப் பொருத்த முதல் மிகை பாதவளை கோட்டைக் கண்டுபிடி.

34. $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்குக் குவியத்தையொட்டிய முதல் மிகை பாதவளைகோடு, உச்சியிலுள்ள தொடுகோடு என்பதைக் காட்டு.

35. $x^m y^n = a^{m+n}$ என்பதன் முதல் மிகைபாதவளைகோடு யாது ?

36. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$. என்பதின் முதல் மிகைப் பாதவளை கோடு யாது ?

37. வட்டத்தின் முதல் மிகைபாத வளைகோடு (ஏதாவதொரு புள்ளியிலிருந்து எடுத்தால்) $r = a + b\cos\theta$ என்று வரும் ; குறித்த புள்ளி பரிதியின்மேல் இருப்பின் அது ஒரு நெஞ்சுவளையாகும். —இவைகளை நிரூபி.

38. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையின் நான்காவது குறைபாத சமன்பாடு ஒரு பரவளை என்று காட்டு.

39. $y^2 = 4ax$ என்ற வளைகோட்டிற்கு உச்சியைத் துருவமாக வைத்தால் அதன் $(p - r)$ சமன்பாடு கீழ் கண்டவாறு அமையும் என்று காட்டு :

$$a^2(r^2 - p^2)^2 = p^2(r^2 + 4a^2)(p^2 + 4a^2)$$

40. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளைகோட்டின் $(p - r)$ சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

41. ஒரு புற உருள் வளையின் (Epicycloid) சமன்பாடுகள்

$$x = (a + b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right);$$

$$y = (a + b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a + b}{b} \theta \right)$$ என்றிருந்தால்,

அதன் (P — r) சமன்பாடு.

$$r^2 = a^2 + 4p^2 \left[\frac{a + b)\, b}{a+2b\,)^2} \right]$$ என்றிருக்கும் என்று காட்டு;

மற்றும் அதன் உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு.

$$s = \frac{4b\,(a + b)}{a} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{a\psi}{a + 2b} \right) \right\}$$ என்று நிறுவுக.

42. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு வடிவத்தைக் கண்டுபிடி :

(i) $r = a\, e^{\theta \cot \alpha}$

(ii) $y = c \cosh \left(\frac{x}{c} \right)$

(iii) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}$

(iv) $27\, my^2 = 8x^3$

(v) $x = 2\,(\theta + \sin \theta)$; $y = 2\,(1 - \cos \theta)$

(vi) a என்ற ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம்.

43. $p = f(r)$ என்பது ஒரு வளைகோடு. மையம் துருவத்திலும், K-என்ற ஆரையுமுள்ள ஒரு வட்டத்தைக் கொண்டு அதன் தன்மாற்றத்தைக் கணக்கிட்டால் அது $p = \frac{r^2}{k^2} f \left(\frac{k^2}{r} \right)$ என்றிருக்கும் என்று காட்டு.

44. $F(x, y) = 0$ என்பதன் தன்மாற்றத்தைக் கண்டுபிடி. [ஆதியை மையமாகவும், K-ஆரையுள்ளதுமான வட்டத்தைக் கொண்ட தன்மாற்றம்.]

45. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளைகோட்டின் தன்மாற்றம் [அதன் மையத்தைக் கொண்டது] $(x^2 + y^2)^2 = K^4 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$ என்று காட்டு.

46. கீழ் கண்டவற்றை நிரூபி :

குவியத்தையொட்டிய ஒரு பரவளைவின் தன்மாற்றம் ஒரு நெஞ்சுவளை.

47. $x^m y^n = a^{m+n}$ என்பதன் தலைகீழ் முனைவுக் கோடும் அதே வகையைச் சார்ந்தது [மையம் ஆதியிலிருந்தால்] என்று நிரூபி.

48. $P = f(r)$ என்பதின் தலைகீழ் முனைவுக் கோடு $\frac{k^2}{r} = f\left(\frac{k^2}{P}\right)$ என்று காட்டு [துருவத்தை மையமாகக் கொண்டு.]

49. $r^m = a^m \cos m\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $r^2 \cos 2\theta = a^2$ என்ற அதிபரவளைவையொட்டிய தலை கீழ் முனைவுவளை கோடு $r^k \cos K\theta = a^k$; $\left[K = \frac{m}{m+1}\right]$ என்று காட்டு.

[குறிப்பு : $S = 0$ என்பது ஒரு சமன்பாடு ; $U = 0$ என்பது ஒரு கூம்புவளை என்போம். $S = 0$ வின் தொடுகோடுகளைக் காண்போம். அவைகளின் $U = 0$ என்ற கூம்பு வளைவுக்கான துருவங்களை (Poles) கண்டு, அந்த துருவங்களின் நியமப் பாதையைக் கணக்கிட்டால் மேற்கண்ட தலைகீழ் முனைவுவளை கோடு வரும்.]

50. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ என்ற வளைகோட்டின் $(P - \psi)$ சமன்பாடு $\frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} + \frac{1}{b^2 \sin^2 \psi} = \frac{1}{p^2}$ என்று அமையும் என்று காட்டு.

51. $y^2 (3a - x) = (x - a)^3$ என்ற சமன்பாட்டின் $(p - r)$ வடிவம் கீழ்க்கண்டவாறு அமையும் என்று காட்டு.

$$P^2 (r^2 + 15a^2) = 9a^2 (r^2 - a^2)$$

52. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளின் பரப்பைக் கண்டுபிடி :

(i) $r = a(1 + \cos\theta)$ — முழுப்பரப்பையும்;

(ii) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ „ ;

(iii) $r = a \cos 3\theta$ — ஒரு தடத்தின் (Loop) பரப்பையும்;

(iv) $r = 4(1+\cos\theta)$ முழுப்பரப்பையும்

(v) $r = 2 - \cos\theta$,,

(vi) $r = a\sin 2\theta$,,

(vii) $r = 2 + \sin\theta$,,

(viii) $r(1+\cos\theta) = a$, $\theta = 0$விலிருந்து, $\theta = 120^\circ$ வரை

(ix) $r^2\cos 2\theta = a^2$ $\theta = 0$விலிருந்து $\theta = 30^\circ$ வரை

(x) $r = a\sec^2(\theta/2)$ வளைகோட்டிற்கும் செவ்வகலத்திற்கு மிடையே.

(xi) $r = 2 + 3\cos\theta$ இரு தடங்களிடையேயுள்ளது.

53. $r = a\sqrt{2}$ மற்றும் $r = 2a\cos\theta$ என்கிற வளைகோடுகளுக்குப் பொதுவான பரப்பு $a^2(\pi - 1)$ என்று காட்டு.

54. (i) $r = 3\cos\theta$, $r = 1 + \cos\theta$
(ii) $r = 1 - \cos\theta$, $r = \sin\theta$
(iii) $r = \sqrt{6}\cos\theta$, $r^3 = a\cos 2\theta$
(iv) $r = \sqrt{2}\sin\theta$, $r^3 = \cos 2\theta$
(v) $r^2 = 2\cos 2\theta$, $r = 1$
(vi) $r = 1 - \cos\theta$, $r = 3/2$

} இவற்றினிடையேயுள்ளபொதுவான இடத்தின் பரப்புகளைக் கண்டுபிடி.

55. $r\theta = a$ என்ற சுருளியில் இரு ஆரைத்திசையிகளிடையே (Radii Vectors) உள்ள பரப்பு, இத்திசையிகளின் நீளங்களின் வித்தியாசத்திற்கு விகிதசாம்யமுடையது என்று காட்டு.

56. $r = a + b\cos\theta$; $b > a$ என்கிற வளைகோட்டிலுள்ள இருதடங்களின் பரப்பு $\pi/2\ (2a^2 + 2b^2)$ என்று காட்டு. $b = a$ ஆனால், வளைகோடு நெஞ்சுவளையாகும்; எனவே நெஞ்சுவளையின் பரப்பைக் கண்டுபிடி.

57. $r\cos^2(\theta/2) = a$ என்கிற பரவளையத்திற்குக் குவியத்தினின்று a நீளமுள்ள திசையிகள் (vectors) வரையப்பட்டால், அவைகளினிடையேயுள்ள பரப்பு $= 1/2\sqrt{a(r-a)}\ (2a + r)$, என்று நிரூபி.

58. $r = 3 \sin \theta$ என்ற வட்டத்தினுள்ளும், $r = 1 + \sin \theta$ என்ற நெஞ்சுவளைக்கு வெளியேயும் உள்ள பரப்பைக் கண்டுபிடி.

59. $r = a\ (1 + 2 \sin \theta)$ என்ற வளைகோட்டின் உள் தடத்தின் மற்றும் அதன் மொத்தப் பரப்பையும் கண்டுபிடி.

60. $r^2 = a^2\ (3 - \cos \theta)$ என்ற வளைகோட்டின் உள் தடத்தின் பரப்பையும், வளைகோட்டின் மொத்தப் பரப்பையும் கண்டுபிடி.

விடைகள்

1. $r \sin \theta = 3$; 2. $r \cos \theta = -5$ 3. $r = \dfrac{8}{\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta}$

7. (a) $(3,\ 0°)$, 3; (b) $(5, 90°)$; (c) $(4, 270°)$, 4

9. (a) $(2\sqrt{2}, 45°)$, $(2\sqrt{2}, -45°)$;

(b) $(0, 0)$, $(3, 30°)$, $(3, 150°)$, $(-6, 270°)$;

(c) $(1, \pi/2)$, $(1, -\pi/2)$; (d) $(8/3, \sin^{-1}\frac{1}{4})$

(e) $(\sqrt{2}, \pi/4)$; (f) $(a, 1)$; (g) $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)$

10. (i) -1; (ii) 3; (iii) $-5\sqrt{3}$; (iv) $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$;
(v) -1; (vi) 0; (vii) $0, 1, \infty, -1$; (viii) $-\infty$;

11. (a) $(\pi/2 + 2\theta$; (b) $\theta/2$; (c) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{b}\right)$;

(d) $\pi/2 + m\theta$; (e) $\pi/4 + m\theta$;

12. (a) $\pi/2$; (b) $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$; (c) $\pi/4$; (d) $3 \sin^{-1}(\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}$;
(e) $\pi/2$; (f) $\pi/2$; (g) $2\pi/3$; (h) ஆதியில் 0°, மற்ற இரு புள்ளிகளில் $\tan^{-1}(3\sqrt{3}$; (i) $\pi/4$; (j) $\pi/2$;
(k) $\tan^{-1}(\frac{1}{3})$; (l) 0°, $\tan^{-1}(\sqrt{3}\ 3/5)$;
(m) $\pi/2$; (n) $\pi/2$; (o) $\pi/2$; (p) $\pi/2$; (q) $\tan^{-1}(\frac{4}{3})$

17. (i) $\frac{-r^3}{a^2 \sin 2\theta}$, $\frac{-a^2 \sin 2\theta}{r}$; (ii) $\frac{r^2}{a^2}$, a;

(iii) $\frac{r}{\log a}$, $r \log a$;

(iv) $\frac{1}{2} a \operatorname{cosec} 2\theta$, $2a \sec 2\theta \tan 2\theta$

(v) $r \tan \alpha$, $r \cot \alpha$;

18. (a) $\frac{a^\theta}{\log a} \sqrt{1 + (\log a)^2}$, $a^\theta \sqrt{1 + (\log a)^2}$;

(b) $r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$, $\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

(c) $r \sqrt{1 + \frac{1}{(\log a)^2}}$, $r \sqrt{1 + (\log a)^2}$;

(d) $\sqrt{r^2 + \frac{6}{a^4} \operatorname{cosec}^2 (2\theta)}$, $\sqrt{r^2 + \frac{a^4 \sin^2 2\theta}{r^2}}$;

25. (i) $\frac{ae^\theta}{(1+\theta)\sqrt{2 + 2\theta^2}}$; (ii) $r \cos 2\theta$;

(iii) $\frac{a^2}{r}$ (iv) $p = \frac{r^{m+1}}{a^{m+1}}$;

26. (a) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{c^2}{r^4}$; (b) $p = r \sin \alpha$

(c) $\frac{1}{p^2} = \frac{l^2-1}{r^2} + \frac{2}{lr}$; (d) $r^3 = 2ap^2$;

(e) $r^4 = p^2 [a^2 m^2 + (1-m^2) r^2]$; (f) $r^4 (b^2 - a^2 + 2ar) p^3$

(g) $p\, a^m = r^{m+1}$; (h) $r^{m+1} = \sqrt{a^{2m} + b^{2m}}$;

(i) $ar^3 = 4p^4$ (j) $pr = a^2$;

29. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$; 31. (a) $s = a [\log (\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}]$

(b) $a [2/3 + \log \sqrt{3}]$; (c) $\log (2 - \sqrt{3})$; (d) $8a$

(e) $2a[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})]$; (f) $(r_1 - r_2)\sec\alpha$;

(g) $\frac{3a\pi}{2}$; (h) 5π;

(i) $2a\left[\sqrt{5} - 2 - \sqrt{3}\log\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)}\right]$;

(j) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\log[2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}]$; (k) $= \frac{3\pi a}{2}$

32. $\sqrt{a^2 + r_1^2} - \sqrt{a^2 + r_2^2}$

$$+ a\log\frac{r_1(a + \sqrt{a^2 + r_2^2})}{r_2(a + \sqrt{a^2 + r_1^2})};$$

33. $x(x^2 + y^2) + a y^2 = 0$;

35. $r^{m+n} = a^{m+n}(m+n)^{m+n}\cos^m\theta\sin^n\theta$

36. $r = \pm a\sin\theta\cos\theta$;

40. $r^2 + 3p^2 = a^2$.

42. (i) $S = ae^{4\cot\alpha}$; (ii) $S = c\tan\psi$;
(iii) $S = k\sin^2\psi$; (iv) $S = m(\sec^3\psi - 1)$
(v) $S = 8\sin\psi$; (vi) $S = a\psi$;

44. $F\left[\frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2}\right] = 0$;

52. (i) $\frac{3\pi a^2}{2}$; (ii) a^2; (ii) $\frac{\pi a^2}{12}$; (iv) 24π;

(v) $\frac{3}{2}\pi$; (vi) $\frac{1}{2}\pi a^2$; (vii) $\frac{9}{2}\pi$; (viii) $\cdot 866a^2$; (ix) $0{\cdot}33a^2$;

(x) $\frac{8}{3}a^2$; (xi) $\frac{17\pi}{4} + 3\sqrt{5} + \frac{17}{2}\cos^{-1}(\frac{-2}{3})$

54. (i) $5/4\,\pi$; (ii) $(\pi/2 - 1)$; (iii) $1/2\,(\pi + 9 - 3\sqrt{3})$;

(iv) $1/6\,(\pi + 3 - 3\sqrt{3})$; (v) $\pi/3 + 2 - \sqrt{3}$;

(vi) $\frac{7\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}$;

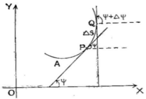
58. π : $5a$; $a^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $a^2\left(2\pi + 5\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

60. $a^2\,(3\pi - 2)$; $a^2\,(3\pi + 2)$

3. வளைவு

(CURVATURE)

3·1. வளைவு வரையறைகள்.



படம் 3·1

ஒரு வளைகோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியில் அவ்வளை கோட்டிற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் திசை, புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறிக்கொண்டேவரும். இந்த மாறுதலை அளவிடுவதுதான் இப்போது நம் குறிக்கோள். $P(x, y)$ என்ற புள்ளியில் தொடு கோட்டின் திசையை ψ என்றும் அதனை அடுத்த $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ என்ற புள்ளியில் திசையை $(\psi + \Delta \psi)$ என்றும் குறிப்பிடுவோம். A, வளைகோட்டின் மேல் ஒரு நிலைப் புள்ளி. வில் $AP = s$; வில் $AQ = s + \Delta s$ ஆக இருக்கட்டும். Δs என்பது PQ வளைகோட்டின் நீளம். புள்ளி P-யிலிருந்து Q-வுக்குச் செல்லுங்கால் வளைகோட்டின் திசையில் மாற்றம் $\Delta \psi$ ஆகும்.

இப்போது $\frac{\Delta \psi}{\Delta s}$ அதாவது $\frac{\text{திசையின் மாற்றம்}}{\text{வளைகோட்டின் நீளம்}}$ என்ற விகிதத்தை நாம் "சராசரி வளைவு" (Average curvature)

என்றழைப்போம். $\triangle s$-என்பது குறுகிக் கொண்டே பூஜ்யத்தை அணுகும் போது இந்த விகிதத்தின் எல்லையை P-ல் வளைகோட்டின் வளைவு என்றழைப்போம். இதைக் "கோட்டம்" என்றும் கூறலாம்.

எனவே P-என்ற புள்ளியில், k-என்பது வளைவானுல்

$$k = \underset{\triangle s \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{\triangle \psi}{\triangle s} \right) = \frac{d\psi}{ds}$$

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx} \;;\; \sec^2 \psi \, \frac{d\psi}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{ds} \therefore \frac{d\psi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{ds}}{\sec^2 \psi}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ பிரதியிட்டால்}$$

$$k = \frac{[\, d^2y/dx^2 \,]}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{36}$$

என்ற முடிவு வரும்.

இவ்வாறில்லாமல், $\cot \psi = \dfrac{dx}{dy}$

எனவே $\operatorname{cosec}^2 \psi \, \dfrac{d\psi}{ds} = \dfrac{d^2x}{dy^2} \dfrac{dy}{ds}$ என்று தொடங்கினுல்,

$$k = \frac{(\, d^2x/dy^2 \,)}{\left\{ 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{37}$$

என்ற முடிவு வரும்.

து. மு. 1.

$x = f(t) \quad y = \phi(t)$ என்பது வளைகோடானுல்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x' y'' - y' x''}{(x')^3}$$

இங்கு வகையிடுதல் t-ஐ ஒட்டியது.

$$\text{எனவே } k = \frac{| x' y'' - y' x'' |}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (38)$$

எ. கா. 1.

$x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ என்ற நீள் வட்டத்திற்கு $\theta = 0$; $\theta = \pi/2$ என்ற புள்ளிகளில் வளைவுகளைக் கண்டுபிடி.

குறித்த புள்ளிகள் நீள் வட்டத்தின் அச்சு முனைகளைக் குறிக்கின்றன.

இங்கு $\left.\begin{array}{l} x' = -a \sin \theta \\ x'' = -a \cos \theta \end{array}\right\}$, $\theta = 0$ எனுங்கால் $\begin{array}{l} x' = 0 \\ x'' = -a \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y' = b \cos \theta \\ y'' = -b \sin \theta \end{array}\right\}$ $\theta = 0$ எனுங்கால் $\begin{array}{l} y' = b \\ y'' = 0 \end{array}$

எனவே (38)—வாய்பாட்டின்படி

$$k = \frac{0 + ab}{[0 + b^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{b^2}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ என்னும் பொழுது $x' = -a$, $x'' = 0$;

$y' = b$, $y'' = 0$.

எனவே $k = \dfrac{b}{a^2}$ ஆகும்.

(36)-ம் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துவோம் $[\theta = 0]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{0} = \infty$$

எனவே (36) ம் வாய்பாடு பயனில்லாமல் போய் விடுகிறது. அப்போது (37)ம் வாய்பாடு உதவி புரியும்.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a \sin \theta}{b \cos \theta} = -\frac{a}{b} \tan \theta$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{a}{b} \tan \theta\right) \cdot \frac{d\theta}{dy}$$

$$= \left(-\frac{a}{b}\sec^2\theta \right) \frac{1}{b\cos\theta}$$

$$= -\frac{a}{b^2}\sec^3\theta.$$

$\theta = 0$ என்று பிரதியிட

$$\frac{dx}{dy} = 0; \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{a}{b^2}$$

எனவே $k = \frac{a}{b^2}$ என்று முன் போல் வருகின்றது.

அதுபோலவே, $\theta = \frac{\pi}{2}$ எனும்போது (36)ம் வாய்பாடுதான் பயன்படும்; (37)ம் வாய்பாடு பயன்படாது.

§ 3·2. வட்டத்தின் வளைவு

வட்டத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வளைவு ஒரே மதிப்புள்ளதாகும்; அந்த மதிப்பு ஆரையின் தலைகீழ் எண்.

வட்டத்தின் ஆரையை 'r' என்போம். அப்போது ψ என்ற கோணத்தையுடைய வில்லின் நீளம் $s = r\psi$ எனவே

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{r}$$

அல்லது $x^2 + y^2 = r^2$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடானுல்

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + xy'}{y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{y^3} \qquad = \frac{r^2}{y^3}$$

$$\text{எனவே } k = \frac{r^2/y^3}{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{r^2}{y^3}\,\frac{y^3}{r^3} = \frac{1}{r}$$

மற்ற வளைகோடுகளுக்கு, எல்லா புள்ளிகளிலும் வளைவு ஒரே மதிப்புள்ளதாக இருக்காது.

§ 3.3: வளைவு வட்டம் ; வளைவு மையம் ; வளைவு ஆரை

ஒரு வளைகோட்டின் அடுத்தடுத்த மூன்று புள்ளிகளை P,Q,R என்போம். அவற்றினூடே ஒரே ஒரு வட்டத்தை வரையமுடியும் அல்லவா ? Q,R என்ற இரண்டு புள்ளிகளும் P-க்கு நெருங்கி வருமானால், PQ,QR என்பவை வளைகோட்டிற்கும் வட்டத்திற்கும் அடுத்தடுத்து இரு தொடுகோடுகளாகும். எனவே, இரண்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் ஒன்று தான். மற்றும் புள்ளிகள் அடுத்தடுத்து இருப்பதனால், வளைகோட்டின் நீளமும் வட்டத்தின் நீளமும் கூட ஒன்றுதான். ஆக வளைகோட்டின் வளைவையும், வட்டத்தின் வளைவையும் சமமாக எடுத்துக் கொள்ளல் பொருந்தும். இத்தகைய வட்டத்தைத்தான் வளைவு வட்டம் என்போம்.

எனவே ஒரு வளைகோட்டின் அடுத்தடுத்த மூன்று புள்ளிகளினூடே செல்லும் வட்டம் வளைவு வட்டம் எனப்படும். அதற்கும் வளைகோட்டிற்கும் மூன்று புள்ளிகள் பொது. எனவே வட்டமும் வளைகோடும் இரண்டாம் படித் தொடுகை உள்ளவை.

இந்த வளைவு வட்டத்தின் மையத்தை "வளைவு மையம் என்போம். PQ,QR என்பவை இரண்டிற்கும் தொடுகோடுகள். ஆதலால் இரண்டு அடுத்தடுத்த செங்கோடுகளும் இரண்டு வளைகோட்டிற்கும் பொதுவானவை.

எனவே வளைவு மையத்தை அடுத்தடுத்த செங்கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியென்றும் கூறலாம்,

இந்த வளைவு வட்டத்தின் ஆரையை "வளைவு ஆரை" என்போம். அதாவது, வளைவு ஆரை, குறித்த புள்ளியிலிருந்து

வளைவு மையத்தினிடையே உள்ள தூரம். வளைவு ஆரையை ρ என்று அழைத்தால் $\rho = \frac{1}{k}$ என்றுகிறது.

எ. கா. 2.

$y = x - x^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $(1,0)$ என்ற புள்ளியில் வளைவு, வளைவு ஆரைகளைக் கண்டுபிடி.

இங்கு $y' = 1 - 2x,\ y'' = -2$

குறித்த புள்ளியில் $y' = 1,\ y'' = -2.$

$$\text{எனவே வளைவு} = \frac{+2}{(1+1)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ஆக வளைவு ஆரை $= \sqrt{2}.$

§ 3. 4. வளைவு ஆரை : பல வாய்பாடுகள்

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\psi} \tag{39}$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \tag{40}$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{d^2x/dy^2} \tag{41}$$

$$\rho = \frac{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}{x'\,y'' - y'\,x''} \tag{42}$$

இவைகள் முன்பு தெரிந்த முடிவுகளிலிருந்து கிடைக்கின்றன

து. மு.

$F(x,y) = 0$ என்பது சார்பலனுனால்

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

மறுபடியும் வகையிட

$$F_{xx} + 2 F_{xy} \left(\frac{dy}{dx}\right) + F_{yy} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_y \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

(40) ல் பிரதியிட்டு எளிதாக்க.

$$\rho = \frac{(F^2{}_x + F^2{}_y)^{\frac{3}{2}}}{F_{xx} F_y{}^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x{}^2} \qquad (43)$$

போலார் கூறுகளில் P-ன் வாய்பாடு

$r = f(\theta)$ என்பது சார்பலன்.

$\psi = \theta + \phi$; மற்றும் $\tan \phi = \frac{r}{r'}$;

$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}$ என்பன நாம் அறிந்தவை.

எனவே θ-ஐ வைத்து வகையிட

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 1 + \frac{d\phi}{d\theta}$$

$$\sec^2\theta \ \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{(r')^2 - r \cdot r''}{(r')^2}$$

அல்லது $\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{(r')^2 - rr''}{r^2 + (r')^2}$

ஆக $\frac{d\psi}{d\theta} = 1 + \frac{(r')^2 - rr''}{r^2 + (r')^2}$

$$= \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{r^2 + (r')^2}.$$

வளைவு

எனவே $\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{ds/d\theta}{d\psi/d\theta}$

$$= \frac{\sqrt{r^2 + (r')^2}\ [r^2 + (r')^2]}{r^2 + 2(r')^2 - rr''}$$

$$\text{முடிவாக } \rho = \frac{[r^2 + (r')^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2(r')^2 - rr''} \tag{44}$$

($'$) குறிகள் θ-ஐ வைத்து வகையிடலைக் குறிக்கும்.

$(p - r)$ சமன்பாட்டிலிருந்து வளைவு ஆரையின் வாய்பாடு.

$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}(r')^2$ என்பது நாம் அறிந்தது.

எனவே $p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + (r^1)^2}}$

r-ஐ வைத்து வகையிட

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\sqrt{r^2 + (r')^2}\ 2r - \frac{r^2}{2\sqrt{r^2 + (r')^2}}\left\{2r + 2r'\ r''\ \frac{1}{r'}\right\}}{r^2 + (r^1)^2}$$

$$= \frac{2r\,[r^2 + r'^2] - r^2\,[r + r'']}{\{r^2 + (r')^2\}^{\frac{3}{2}}} = r\,\frac{[r^2 + 2r'^2 - rr'']}{[r^2 + (r')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

(44) ல் பிரதியிட

$$\frac{dp}{dr} = \frac{r}{\rho} \text{ எனவே } \rho = r\frac{dr}{dp} \tag{45}$$

என்ற எளிதான வாய்பாடு கிடைக்கின்றது.

எ. கா. 3.

$x = 3t + 1$; $y = t^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $t = 1$ என்ற புள்ளியில் வளைவு ஆரையைக் கணக்கிடு.

$x' = 3;\ x'' = 0;\ y' = 2t = 2$ (குறித்த புள்ளியில்); $y'' = 2$.

என்வே $p = \dfrac{(3^2 + 2^2)^{\frac{3}{2}}}{6 - 0} = \dfrac{13\sqrt{13}}{6}$

எ. கா. 4.

$9y^2 - 4x^2 = 5$ என்பதற்கு $(1, 1)$ புள்ளியில் வளைவு ஆரையைக் கணக்கிடு.

இங்கு $F(x, y) = 9y^2 - 4x^2 - 5 = 0$

$F_y = 18y = 18$ குறித்த புள்ளியில்

$F_{yy} = 18$ குறித்த புள்ளியில்

$F_x = -8x = -8$ குறித்த புள்ளியில்

$F_{xx} = -8$ குறித்த புள்ளியில்

$F_{xy} = 0$ குறித்த புள்ளியில்

$$\rho = \frac{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}{F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}$$ ல் பிரதியிட

$$\rho = \frac{(64 + 324)^{\frac{3}{2}}}{-8 \cdot 324 - 0 + 18 \cdot 64} = -\frac{97\sqrt{97}}{180}$$

எ. கா. 5.

$r^m = a^m \sin m\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு (r, θ) என்ற புள்ளியில் P-ஐ கண்டுபிடி.

லாகரிதம் எடுக்க $m \log r = m \log a + \log (\sin m\theta)$

வகையிட $\dfrac{m}{r}(r') = \dfrac{m \cos m\theta}{\sin m\theta}$

$$r' = r \cot (m\theta)$$

$$r'' = -r \operatorname{cosec}^2 (m\theta)\, m + (\cot m\theta)\, r'$$

$$= -mr \operatorname{cosec}^2 (m\theta) + r \cot^2 (m\theta)$$

(44)-ல் பிரதியிட

$$\rho = \frac{(r^2 + r^2 \cot^2 m\theta)^{3/2}}{r^2 + 2\, r^2 \cot^2 m\theta + m r^2 \operatorname{cosec}^2 m\theta - r^2 \cot^2 m\theta}$$

$$= \frac{r \operatorname{cosec}^3 m\theta}{(m+1) \operatorname{cosec}^2 m\theta} = \frac{r \operatorname{cosec} m\theta}{m+1} = \frac{r}{m+1} \frac{am}{rm}$$

$$\text{எனவே, } \rho = \frac{am}{(m+1)\, r^{m-1}}$$

அல்லது : இந்த வளைகோட்டின் பாத சமன்பாடு $pa^m = r^{m+1}$ என்று முன்பே கண்டுள்ளோம். எனவே 45-ம் வாய் பாட்டையும் பயன்படுத்தலாம்.

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{a^m} (m+1)\, r^m$$

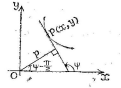
$$\text{எனவே, } \rho = r \frac{dr}{dp} = \frac{r \cdot a^m}{(m+1)\, r^m} = \frac{a^m}{(m+1)\, r^{m-1}}$$

எ. கா. 6.

வளைகோட்டின் வடிவம் $(p - \psi)$ சமன்பாடாக இருந்தால் P-ஐ கண்டுபிடிக்க ஒரு வாய்பாட்டை நிறுவு. அதனை பயனுக்கியோ அல்லது வேறு வகையிலோ $p^2 = a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வளைவு ஆரை என்ன என்று அறிக.

$p^2 = a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi$ என்பது $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் தொடுகோட்டு மூனைவுச் சமன்பாடு [2-ம் அத்தியாயம் எ. கா. 21]. ஆதியிலிருந்து p-புள்ளியின் தொடு கோட்டிற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால் அதன் நீளம் p-ஆகும். அது x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும்

கோணம் $\psi - \dfrac{\pi}{2}$ ஆகும்.



படம் 3.2

எனவே, அத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$p = x \cos(\psi - \pi/2) + y \sin(\psi - \pi/2)$$

அதாவது $p = x \sin\psi - y \cos\psi$ (i)

இதனை ψ-ஐக் கொண்டு வகையிடுவோம்.

$$\frac{dp}{d\psi} = x \cos\psi + \sin\psi \frac{dx}{d\psi} + y \sin\psi - \cos\psi \frac{dy}{d\psi}$$

இப்பொழுது $p = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{d\psi}$

எனவே $\frac{dx}{d\psi} = \frac{p}{ds/dx} = \frac{p}{\sqrt{1 + y_1^2}}$

மற்றும் $\frac{dy}{d\psi} = -\frac{p}{ds/dy} = \frac{p}{y_1 \sqrt{1 + y_1^2}}$

ஆனல் $\tan\psi = y_1$. ஆதலால் $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + y_1^2}}$

$$\sin\psi = \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \tag{45 A}$$

எனவே, $\frac{dx}{d\psi} = p \cos\psi$; $\frac{dy}{d\psi} = p \sin\psi$.

ஆக $$\frac{dp}{d\psi} = x\cos\psi + p\sin\psi\cos\psi + y\sin\psi$$

$$- p\sin\psi\cos\psi$$

$$= x\cos\psi + y\sin\psi \qquad \text{(ii)}$$

மறுமுறை வகையிட்டால்

$$\frac{d^2p}{d\psi^2} = -x\sin\psi + \cos\psi\, p\cos\psi + y\cos\psi$$

$$+ \sin\psi\, p\sin\psi$$

$$= -x\sin\psi + y\cos\psi + p \qquad \text{(iii)}$$

(i)-ல் பிரதியிட

$$\rho = p + \frac{d^2p}{d\psi^2} \qquad (47)$$

இது தான் ρ-ஐ $(p\text{-}\psi)$ என்ற வடிவத்தில் கணக்கிடப் பயன்படும் வாய்பாடு.

$$p^2 = a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi$$

$$p^2 - a^2 = (b^2 - a^2)\sin^2\psi$$

$$b^2 - p^2 = (b^2 - a^2)\cos^2\psi.$$

ψ-ஐ வைத்து வகையிட

$$2p\frac{dp}{d\psi} = -2a^2\cos\psi\sin\psi + 2b^2\sin\psi\cos\psi$$

$$\therefore \quad p\frac{dp}{d\psi} = (b^2 - a^2)\sin\psi\cos\psi. \qquad \text{(iv)}$$

மறுமுறை வகையிட

$$p\frac{d^2p}{d\psi^2} + \left(\frac{dp}{d\psi}\right)^2 = (b^2 - a^2)\,[-\sin^2\psi + \cos^2\psi]$$

$$= -p^2 + a^2 + b^2 - p^2 = a^2 + b^2 - 2p^2 \qquad \text{(v)}$$

(iv) லிருந்து $\left(\dfrac{dp}{d\psi}\right)^2 = \dfrac{(b^2 - a^2)\sin^2\psi\cos^2\psi}{p^2}$

$$= \frac{(p^2 - a^2)(b^2 - p^2)}{p^2}$$

(v)-ல் இதனைப் பிரதியிட்டு எளிதாக்க

$$p\,\frac{d^2p}{d\psi^2} = a^2 + b^2 - 2p^2 - \frac{(p^2 - a^2)(b^2 - p^2)}{p^2}$$

$$= (a^2 + b^2 - 2p^2) - \left(p^2 + a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{p^2}\right)$$

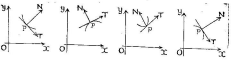
$$= -p^2 + \frac{a^2 b^2}{p^2}$$

எனவே $\rho = p + \dfrac{d^2p}{d\psi^2} = p + \dfrac{1}{p}\left(-p^2 + \dfrac{a^2b^2}{p^2}\right) = \dfrac{a^2 b^2}{p^3}$

ஆக $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் வளைவுஆரையின்

மதிப்பு $\dfrac{a^2 b^2}{p^3}$ ஆகும்.

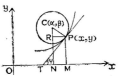
§ 3. 5. வளைவு மையம் ; வாய்பாடுகள்.



படம் 3. 3.

குறித்த புள்ளி $P\ (x, y)$ யிலுருந்து செங்கோட்டில் p-தூரத்தி லுள்ளதுதான் வளைவு மையம் என்று கூறினோம். ஆனால் அதில்

எந்த திசையில் செல்ல வேண்டும் என்பதைக் குறிப்பிடவில்லை. இப்பொழுது அதனை தெளிவாக்குவோம்.



படம் 3. 4.

ஒரு வளைகோட்டில் $P(x, y)$ என்பது ஒரு புள்ளி. **அதன் செங்குத்துக் கோட்டின் நேர் திசையில் P-யிலிருந்து ρ- என்ற தூரத்தில் உள்ளது தான் வளைவு மையம்.**

தொடுகோட்டின் நேர் திசை என்பது x-ன் மதிப்பு அதிகமாகிக் கொண்டே செல்லும் திசைதான் (படம் 3. 3ல்) இதனை அம்புக் குறிகளால் காட்டியுள்ளது ; இத்திசையை $\pi/2$ என்ற கோணத்தில் இடஞ்சுழியாகச் சுற்றினால், செங்கோட்டின் நேர்திசை கிடைக்கின்றது. அதுவும் படத்தில் அம்புக்குறி போட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. பொதுவாக வளைவு வட்டம், வளை கோட்டைத் தாண்டிச் செல்லும். (படம் 3.4-ஐ பார்க்க)

வளை கோட்டிற்கு $p(x, y)$யில் ஒரு தொடுகோட்டை வரைந்தால் அவ்விரண்டிற்கும், x, y, y', களின் மதிப்பு சமமாக இருக்கும். வளைவு வட்டத்தை எடுத்துக் கொண்டால் அதற்கும் வளைகோட்டிற்கும், x, y, y', y'' களின் மதிப்புகள் சமமாக இருக்கும்.

$C(\alpha, \beta)$ என்பது வளைவு மையமாகும் (படம் 3. 4.) PM, CN இரண்டும் x-அச்சுக்குக் குத்துக் கோடுகள். PR என்பது CN க்குக் குத்துக்கோடு. $\angle PTN = \psi = \angle QCP$.

எனவே, $\alpha = ON = OM - NM = X - CP \sin Q\hat{C}P$

அதாவது $\alpha = x - p \sin \psi$ (48)

அதேபோல் $\beta = y + p \cos \psi$

அல்லது $\alpha = x - \dfrac{y'[1+(y')^2]}{y''}$; $\beta = y + \dfrac{(1+(y')^2}{y''}$ (49)

ஆக வளைவு வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = p^2 \qquad (50)$$

வளைவுநாண் :

குறித்த புள்ளியிலிருந்து குறித்த திசையில் வரையப்பட்ட வளைவு வட்டத்தின் நாண்தான் வளைவுநாண் எனப்படும்.

படம் 3-4ல் PR, PS என்பவை x-அச்சிற்கும், y-அச்சிற்கும் முறையே இணையான வளைவு நாண்கள்.

$$PR = 2p \sin\psi \; ; \quad PS = 2p\cos\psi \qquad (51)$$

என்பவை எளிதில் அறியக்கூடியவை.

து. மு.

துருவத்தினின்று வரையப்பட்ட வளைவுநாண் $= 2p\cos\phi$ எனக் கணக்கிடலாம். (52)

ஏ. கா. 7.

$x = 3t^2$; $y = 3t - t^3$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வளைவுமையத்தையும், வளைவு வட்டத்தையும் கண்டுபிடி.

$$x' = 6t \qquad y' = 3 - 3t^2$$

$$x'' = 6 \qquad y'' = -6t$$

எனவே $$\rho = \frac{[36t^2 + (3 - 3t^2)^2]^{\frac{3}{2}}}{-36t^2 - 18 + 18t^2}$$

$$= \frac{(3 + 3t^2)^3}{-18(1 + t^2)} = \frac{-3}{2}(1 + t^2)^2$$

$$\alpha = x - p\sin\psi \; ; \; \beta = y + p\cos\psi .$$

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{1 - t^2}{2t} \; ; \; \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \; ;$$

$$\sin\psi = \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}}$$

எனவே $\cos \psi = \frac{2t}{1+t^2}$; $\sin \psi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\text{ஆக } \alpha = 3t^2 + \frac{3}{2}(1+t^2)^2 \frac{(1-t^2)}{1+t^2} = 3/2\,(2t^2+1-t^4)$$

$$\beta = 3t - t^3 - 3/2\,(1+t^2)^2 \frac{2t}{(1+t^2)} = -4t^3$$

வளைவுமையம்: $[3/2\,(2t^2+1-t^4), -4t^3]$

வளைவுவட்டம் $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{9}{4}(1+t^2)^4$ என்றாகும்.

§ 3·6. நியூட்டனின் வாய்பாடு :

ஒருவளைகோடு ஆதியினூடே சென்று, மற்றும்

(i) x-அச்சு ஆதியில் அதன்தொடுகோடாக இருந்தால்

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{2y} = \rho$ அல்லது (ii) y-அச்சு ஆதியில் அதன் தொடுகோடாக இருந்தால்

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{y^2}{2x} = \rho$; இங்கு ρ வளைகோட்டின் ஆதியில் வளைவு ஆரை.

x-அச்சு ஆதியில் தொடுகோடு ஆனால்

$y = 0$; $y_1 = 0$

எனவே $\frac{x^2}{2y}$ என்பது $\frac{0}{0}$ என்ற தேறப்பெருதவடிவில் இருக்கும்

லா' ஹாஸ்பிட்டல்லின் வாய்பாட்டின்படி

$$\left[\underset{x \to 0}{Lt} \frac{g(x)}{H(x)} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{g'(x)}{H'x} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{g''(x)}{H''(x)} \right]$$

$$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{x^2}{2y} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{2x}{2y_1} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{y_2(0)}$$

எனவே $\frac{1}{y_2(0)} = \underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{x^2}{2y}\right)$

இப்பொழுது ρ வாய்பாட்டை கவனிப்போம்.

$\rho = \frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$ எனவே ஆதியில்

$$\rho \to \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{y_2(0)} = \underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{x^2}{2y}\right) \quad \dots (52)$$

இதைப்போலவே (ii) ஐயும் காணலாம்.

து. மு.

$$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{x^2}{2y} = \underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{x^2}{y2} + \frac{y}{2}\right)$$

($x \to 0$ எனும் பொழுது $y \to 0$ என்பதால்)

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+y^2}{2y}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{OP^2}{2PM}\right)$$

இங்கு P என்பது ஏதாவதொரு புள்ளி; PM என்பது P-யிலிருந்து(ஆதி) O-வின் தொடுகோடான OTக்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு.

எ. கா. 8.

$$x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3 + 5x^2 - 6xy + 7y^2 - 8y = 0 \text{ (i)}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $F(x,y) = 0$ என்போம்.

x-ஐக் கொண்டு வகையிட்டு, y-யின் வகைக்கெழுக்களை $y_1, y_2 \dots\dots$ என்று குறிப்பிடுவோம்

$$3x^2 - 2x^2y_1 - 4xy + 6xyy_1 + 3y^2 - 12y^2y_1 + 10x - 6xy - 6y + 14yy_1 - 8y_1 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$x = 0;\ y = 0$ இவைகளைப் பிரதியிட

$y_1 = 0$ என்று வருகிறது. எனவே $y = 0$ அல்லது x-அச்சு இவ்வளைகோட்டின் தொடுகோடு.

எனவே, $\lim \dfrac{x^2}{2y} = \rho$ என்ற வரம்பாட்டைப் பயனுக்கலாம்.

(i) ஐ y-ஆல் வகுக்க

$$x\left(\frac{x^2}{y}\right) - 2x^2 + 3xy - 4y^2 + 5\left(\frac{x^2}{y}\right) - 6x + 7y - 8 = 0$$

$x \to 0$ எனும் பொழுது எல்லையைக் கணிக்க

$0\,(2\rho) + 5\,(2\rho) - 8 = 0$ அல்லது $\rho = \frac{4}{5}$ என்று வருகிறது.

அல்லது

(ii) ஐ x-ஐக் கொண்டு வகையிட.

$$6x - 2x^2y_2 - 4xy_1 - 4xy_1 - 4y + 6xyy_2 + 6yy_1 + 6xy_1^2 + 6yy_1 - 12y^2y_2 - 24yy_1^2 + 10 - 6xy_1 - 6y - 6y_1 + 14yy_2 + 14y_1^2 - 8y_2 = 0$$

இதில் $x = 0;\ y = 0;\ y_1 = 0$ என்று பிரதியிட **(iii)**

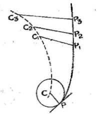
$10 - 8y_2 = 0$ அல்லது $y_2 = 5/4$ என்றுவரும்.

எனவே $\rho = \dfrac{(1 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2} = \dfrac{4}{5}$ என்று முன்போலவே வருகிறது.

§ 3.7. வளைவு மையப்பாதை (Evolute) அல்லது வளை செங்கோட்டுத் தழுவி.

ஒரு வளை கோட்டின் வளைவு மையத்தின் நியமப் பாதையை " எவ் வல்யூட் " அல்லது வளைவு மையப்பாதை என அழைக்கின்

றேம். வளைகோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒரு வளைவு மையம் வரும். இவைகளின் பாதையைக் கணக்கிட்டால் கிடைக்கும் வளைகோடே வளைவு மையப் பாதை,



படம் 3.5

மேற்கண்ட படத்தில் P, P_1, P_2, P_3 என்ற புள்ளிகளுக்கான வளைவு மையங்கள் முறையே C, C_1, C_2, C_3 என்பன. PC, P_1C_1, P_2C_2 P_3C_3 என்பவை குறித்த வளைகோட்டின் செங்கோடுகள். இவ்வகைகள் வளைவுமையப்பாதைக்குத் தொடுகோடுகளாகஅமையும். ஏனென்றல் இரு செங்கோடுகள் அடுத்தடுத்து சந்திக்கும் இடம் தான் வளைவுமையமென்று முன்பே கூறியுள்ளோம். அதாவது C- என்னுமிடத்தில் இரு புள்ளிகள் ஒன்றேடொன்று இணைகின் கின்றன ; எனவே, CP-என்பது வளைவு மையப்பாதையின் தொடுகோடு. இப் பண்பு அதற்குள்ளதால்தான் அதனை " வரை செங்கோட்டுத் தழுவி " என்றும் அழைக்கின்றனர். [இவற்றைப்பற்றி பிரிதொரு அத்தியாயத்திலும் படிப்போம்.]

வளைவுமையப்பாதையைக் கண்டுபிடிக்கும் முறை

α—β இவைகளை 48. அல்லது 49-ம் சமன்பாடுகளினுல்கண்டு பிடி; α, β இவைகளின் மதிப்புகளைக் கொண்டு x, y-களைக் கண்டு பிடி ; இந்த x, y-மதிப்புகளைக் கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டில் பிரதியிடக் கிடைப்பது வளைவுமையப்பாதை.

எ. கா. 9

$x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 | \cos t)$ என்ற உருள் வளை (cycloid)-யின் வளைவுமையப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \; ; \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$$

இவற்றைக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாடுகளில் பிரதியிடலாம்.

$$\alpha = \frac{x - y'(1 + (y')^2)}{y} \; ; \; \beta = y + \frac{(1 + (y')^2)}{y''}$$

$$\alpha = a(t - \sin t) + \frac{\sin t}{1-\cos t}\left[1 + \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right] a(1-\cos t)^2$$

$$= a(t - \sin t) + \frac{\sin t}{1-\cos t}\, a(2 - 2\cos t) = a(t + \sin t)$$

$$\beta = a(1 - \cos t) - \left[1 + \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right] a(1 - \cos t)^2$$

$$= a(1 - \cos t) - 2a(1 - \cos t)$$

$$= -a(1 - \cos t)$$

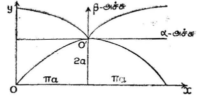
அதாவது $\alpha = a(t + \sin t)$, $\beta = -a(1 - \cos t)$ என்பது தான் வளைவு மையப்பாதையின் சமன்பாடுகள். இவைகள் கூட ஒரு உருள் வளையையே குறிப்பிடும்.

எனவே, ஒரு உருள் வளையின் வளைவுமையப்பாதை மற்றொரு உருள் வளையே.

குறிப்பு : ஆதியை $(-\pi a, -2a)$ என்ற புள்ளிக்கு மாற்றினால் வளைவு மையப்பாதையில் என்ன மாற்றம் ஏற்படுகின்றது என்று பார்ப்போம்.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a(t + \sin t) + \pi a = a(\pi + t + \sin t) \\ &= a(\theta - \sin \theta) \\ \beta &= -a(1 - \cos t + 2a = a(1 + \cos t) \\ &= a(1 - \cos\theta) \end{aligned}\right\} \; \pi + t = \theta \text{ என்று பிரதியிட}$$

அதாவது ஆதியை மாற்றினுல் $\alpha = a\ (\theta - \sin\ \theta)$ $\beta = a\,(1 - \cos\theta)$ என்ருகிறது. எனவே, இந்த உருள்வளையும் கொடுக்கப்பட்ட உருள்வளையைப் போலவே—ஆனுல் $t = \theta - \pi$ என்ற அமைப்பில் உள்ளதைக் காண்கின்ருேம்.



படம் 3.6.

§ 3·8 வளைவுமையப் பாதையின் இயல்புகள் :

(A) வகைக் கணித முறையில் வளைவு மையப் பாதையின் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $(-\cot\psi)$ என்று காட்டு. எனவே இந்தத் தொடுகோடு கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டிற்குச் செங்கோடு என்பதைக் காட்டு.

$y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் சமன்பாடு. இதன் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $\tan\psi = \dfrac{dy}{dx}$

எனவே இதன் செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= -\cot\psi$.

வளைவு மையப் பாதை :

$\alpha = x - \rho\sin\psi\ ;\ \beta = y + \rho\cos\psi$ என்றுள்ளது. இதன் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{d\beta}{d\alpha}$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{ds} - \rho\cos\psi\frac{d\psi}{ds} - \sin\psi\frac{d\rho}{ds}.$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \cos\psi - \cos\psi - \frac{d\rho}{ds}\sin\psi = -\frac{d\rho}{ds}\sin\psi$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{dy}{ds} - \rho\sin\psi\frac{d\psi}{ds} + \cos\psi\,\frac{d\rho}{as} = \frac{d\rho}{ds}\cos\psi.$$

எனவே, $\dfrac{d\beta}{d\alpha} = \dfrac{d\beta/ds}{d\alpha/ds} = -\cot\psi.$

ஆக வளைகோட்டின் செங்கோடு, வளைவு மையப் பாதையின் தொடுகோடாகிறது.

B. **வளைகோட்டின் இரு புள்ளிகளுக்கான வளைவு ஆரைகளின் வித்தியாசமும், வளைவு மையப் பாதையின் முறைப் புள்ளிகளிடையே உள்ள நீளமும் சமமாகும்.**

(படம் 3·5 ஐப் பார்க்க)

$\rho = PC,\ \rho_1 = P_1\,C_1$

$P_1\ P_1$ இரண்டும் அடுத்தடுத்து இருக்குமானால்
$P_1C_1 = P_1\,C +$ வில் CC_1

எனவே $\rho_1 - \rho =$ வில் CC_1

P_1, P_2, P_3 என்பவை பல புள்ளிகளானால்

வில் $C_1\,C_2 = \rho_2 - \rho_1$

வில் $C_2\,C_3 = \rho_3 - \rho_2$

எனவே $C_1\,C_3 = p_3 - p_1$ என்று வரும். இதுதான் கொடுக்கப்பட்ட தேற்றம்.

வேறுமுறை:

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{d\rho}{ds}\sin\psi\,;\ \frac{d\beta}{ds} = \cos\psi\,\frac{d\rho}{ds}$$

இரண்டையும் இருபடியாக்கிக் கூட்டினால்

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 \text{ எனவே}$$

$(d\alpha)^2 + (d\beta)^2 = (d\rho)^2.$

இந்த வளைகோட்டின் நீளத்தை s' என்று குறிப்பிட்டால்

$$(ds')^2 = (d\xi)^2 + (d\eta)^2$$

எனவே $(ds')^2 = (d\rho)^2$

அல்லது $s' = \rho + k$ என்போம்.

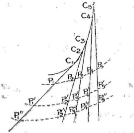
ρ_1, ρ_n என்பவை வளைகோட்டின் P_1, P_n என்ற புள்ளிகளின் வளைவு ஆரைகளாகட்டும். அவைகளுக் கொப்பான வளைவு மையங்கள் C_1, C_n என்றிருக்கட்டும்.

அப்பொழுது $(s')c_1c_n = (\rho_n + k) - (\rho_1 - k) = \rho_n - p_1$ எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

§ 3·9 லம்ப உரை :

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டிற்கு வளைவு மையப் பாதை கண்டோம். அந்த மையப் பாதையைக் குறிப்பிட்டால், கொடுக்கப் பட்ட வளைகோட்டை "லம்ப உரை" (involute) என்று கூறு வோம்.

ஒவ்வொரு வளைகோட்டிற்கும் ஓரே ஒரு வளைவு மையப் பாதைதான் இருக்கும். [இதனை நாம் முன்னமே கண்டுள்ளோம்] ஆனால் பல லம்ப உரைகள் ஓரே வளைகோட்டிற்கு இருக்கக்கூடும்.



படம் 3·7

$C_5, C_4, \ldots\ldots C_1$ என்பது ஒரு வளைகோடு. இதனை ஒட்டியே ஒரு நூலைப் பொருத்தி வைத்து அதனை C_5ல் பதிய வைத்து கொள்

வோம். இப்பொழுது அந்த நூலைப் பிரித்து நேராக நீட்டினால் அதன் எதிர் நுனி P_1'', P_2'', P_3''......P_5'' என்ற வளைகோட்டைக் காட்டும். அதாவது இந்த நூலானது C_5......C_1 என்ற வளை கோட்டிற்குத் தொடுகோடாகிறது. எனவே P_1'', P_2''.....P_5'' என்ற வளைகோடு, ஒரு லம்ப உரையாகிறது. நூலின் எந்த ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டாலும் அதன் பாதை ஒரு லம்ப உரை யாகும். எனவே P_1, P_2, P_3, P_4, P_5......மற்றும் P'_1, P_2'...P_5'... என்பவைகள் எல்லாம் கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் லம்ப உரைகளே.

குறிப்பு :

இவைகளை இணை வளைகோடுகள் என்றும் கூறலாம்.

பொதுவான செங்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரம், இரு இணை வளைகோடுகளுக்கு எப்பொழுதும் சமமாக இருக்கும்.

எ. கா. 10.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளைகோட்டின் வளைவு மையப்பாதையைக் கண்டுபிடி. அதன் முழுநீளமும் $4\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right)$ என்று காட்டு. (M. Sc 67)

இங்கு $x = a\cos\theta \quad y = b\sin\theta$

$x' = -a\sin\theta \quad y' = b\cos\theta$

$x'' = -a\cos\theta \quad y'' = -b\sin\theta$

$$\text{ஆக}\quad \rho = \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta} = \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2\cot^2\theta)^{3/2}\sin^3\theta}{ab}$$

(45A)-ன்படி $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+y_1^2}}$; $\sin\psi = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}$

இங்கு $y_1 = -\frac{b}{a}\cot\theta$ எனவே $\cos\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2\cot^2\theta}}$

$$= -\frac{b\cot\theta}{\sqrt{a^2+b^2\cot^2\theta}}$$

$$\therefore\ \alpha = x - \rho\sin\psi$$

$$= \frac{a\cos\theta - (a^2+b^2\cot^2\theta)^{3/2}\sin^3\theta\, b\cot\theta}{ab\sqrt{a^2+b^2\cot^2\theta}}$$

$$= a\cos\theta - \frac{1}{a}\cos\theta\sin^2\theta\,(a^2+b^2\cot^2\theta)$$

$$\therefore\ a\alpha = a^2\cos\theta\left\{(1-\sin^2\theta) - b^2\cos^2\theta\right\}$$

$$= (a^2-b^2)\cos^3\theta$$

அதுபோலவே $b\beta = (a^2-b^2)\sin^3\theta$.

எனவே $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}$ என்பதுதான் வளைவுமையப் பாதை. இது α, β என்ற இரு அச்சுகளிலும் சமச்சீராக அமைந்துள்ளதால், மொத்த நீளம் = 4 (முதல் கால் வட்டத்திலுள்ள நீளம்) முதல் கால் வட்டத்தில் θ-ன் மதிப்பு 0-விலிருந்து $\frac{\pi}{2}$ வரை. மற்றும் இந்த நீளம் ($\theta = \frac{\pi}{2}$ -ல் வளைவு ஆரை) — ($\theta = 0$-வில் வளைவு ஆரை)

எனவே முதல் கால் வட்டத்தில் அதன் நீளம்

$$= \left[\frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^3}{ab} - \frac{b^3}{ab} = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}$$

ஆகவளைவுமையப் பாதையின் முழு நீளம் $= 4\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right)$

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குக் குறித்த புள்ளிகளில் வளைவுகளைக் கண்டுபிடி.

1. $y + 4x^2 = 0$; $(0, 0)$ $(1, -4)$, $(2, -16)$ களில்.
2. $y = x(x+3)^2$; $(0, 0)$-ல்
3. $y = \cos x$; $(\pi, 1)$-ல்
4. $9y^2 - 4x^2 = 5$ $(1, 1)$-ல்
5. $y^2 = 4x$; உச்சியில்
6. $x = a\cos^4\theta$; $y = b\sin^4\theta$; $\theta = \theta_1$-ல்
7. $y = e^x$; $(0, 1)$-ல்
8. $xy = 12$; $(3, 4)$-ல்
9. $y = bg\,(\sec x)$ ஏதாவதொரு புள்ளியில்
10. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$,,
11. $y \cosh x$,,
12. $xy^2 = a^3 - x^3$; $(a, 0)$-ல்
13. $a^2y = bx^3 + cx^2y$; ஆதியில்
14. $(3 - x)(4 - y) = 1$; $(x = 3)$-ல்
15. $y = 2x + 3x^2 - 2xy + y^2$; ஆதியில்
16. $x = 6t^2 - 3t^4$; $y = 8t^3$; ஏதாவதொரு புள்ளியில்
17. $r = a\sin\theta$,,
18. $r = a\theta$,,
19. $r^2 = a^2\cos 2\theta$,,
20. $r = a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$,,
21. $r = 2a\cos\theta - a$,,
22. $r = a\sin n\theta$; துருவத்தில்

23. $r^n = a^n \sin n\theta$; ஏதாவதொரு புள்ளியில்

24. $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ „

25. $r\theta = a$ „

26. $r = a(1 - \cos\theta)$ „

27. $r \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) = a$ „

28. $r = a \sec 2\theta$

29. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$

30. $r^2 \cos 2\theta = a^2$

31. $r = a \sec^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$

32. $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos\theta}$

33. மேற்கண்ட 1 — 32 கணக்குகளில் வளைவு ஆரைகளைக் கண்டுபிடி.

34. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்கு வளைவு ஆரைகளைக் காண்.

(a) $x = 2t$; $y = t^2 - 1$; $t = 1$-ல்

(b) $x = 3t^2$; $y = 3t - t^3$; $t = 1$-ல்

(c) $x = a \cos\theta \ (1 + \sin\theta)$, $y = a \sin \ (1 + \cos\theta)$ $\theta = \pi/4$-ல்

(d) $x = t - c \sinh \frac{t}{c} \cosh \frac{t}{c}$; $y = 2c \cosh \frac{t}{c}$ ஏதாவதொரு புள்ளியில்.

(e) $x^2 y = a(x^2 + y^2)$ $(-2a, 2a)$-ல்

(f) $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ தொடுகோடு x-அச்சிற்கு இணையாயிருக்குமிடத்தில்

(g) $y^2 (a - x) = x^2 (a + x)$ ஆதியில்

(h) $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^3 y = 0$ ...$(2a, 0)$-ல்

(i) $\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} = +1$ இரண்டு அச்சுக்களையும் தொடுமிடங்களில்.

(j) $x^2 y = a(x^2 + a^2/5)$; $x = a$-ல்

(k) $x = \tan t$; $y = \cot t$; $t = \pi/4$-ல்

(l) $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$; $t = t_1$-ல்

(m) $x = a(\cot t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t = t_1$-ல்

(n) $x = a(\theta + \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$; $\theta = \theta_1$-ல்

(o) $4ay^2 = (2a - x)^3$; $(a, a/2)$-ல்

(p) $y = \log(\sin x)$; ஏதாவதொரு புள்ளியில்.

(q) $x = a\log(\sec\theta + \tan\theta)$, $y = a\sec\theta$ $\theta = \theta_1$-ல்

(r) $x = c\sin 2\theta(1 + \cos 2\theta)$; $y = c\cos 2\theta(1 - \cos 2\theta)$ $\theta = \theta_1$-ல்

(s) $x = 3a\cos\theta - a\cos 3\theta$, $y = 3a\sin\theta - a\sin 3\theta$ $\theta = \theta_1$-ல்

(t) $x^3 + y^3 = 3axy$; $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$-ல்

(u) $xy^3 = a^4$ (a, a)-ல்

(v) $y = \log/x$ $x = 1$-ல்

(v_1) $y = mx + n(x - a)^2 (x - b)^2$ $(a, 0)$ $(b, 0)$-ல்

(w) $x^4 + y^4 = 2$: $x = 1$-ல்

(x) $y^2 = x^3 + 8$: $x = -2$-ல்

(y) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 2$: $x = 3$-ல்

(z) $y = 4\sin x - \sin 2x$: $x = \frac{\pi}{2}$-ல்

(z_1) $y^2 = \frac{a^2(a - x)}{x}$: உச்சியில்.

35. $\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ என்ற வளைகோடு இரு அச்சுகளையும் தொடும் இடங்களில் வளைவு ஆரைகளைக் கண்டுபிடி.

36. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வளையத்திற்குச் செவ்வகலம் (latus-rectum) $= 2l$; செங்குத்துக்கோடு $= n$, வளைவு ஆரை $= \rho$ என்றால் $\rho = \frac{n^2}{l^2}$ என்று காண்பி.

37. $y^2 = 8x$ என்ற வளைகோட்டிற்கு எந்தப் புள்ளிகளில் வளைவு ஆரை $\frac{25}{16}$ ஆக இருக்கும்?

38. $x = ae^{\theta} (\sin\theta - \cos\theta)$, $y = ae^{\theta} (\sin\theta + \cos\theta)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வளைவு ஆரை $= \rho$ என்றால், அது அந்தப் புள்ளியின் தொடுகோட்டிற்கும் ஆதிக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தின் இருமடங்கு என்று நிரூபி.

39. $r = a\theta$, $r\theta = a$ என்ற வளைகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியில் இரு வளைவுகள் 3 :1 என்ற விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காண்பி.

40. $x^2 = 4ay$, $y^2 = 4ax$ என்ற வளைகோடுகளுக்கு $(4a, 4a)$ என்ற புள்ளியில் வளைவுகளின் மொத்தம் பூஜ்யம் (zero) எனக் காட்டு.

41. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவிற்கு $P(a \sec\theta, b\cos\theta)$ என்ற புள்ளியில் $\rho = \frac{CD^3}{ab}$ என்று காட்டு [CD என்பது CP க்கு துணையில் அரை விட்டம் (semi conjugate diameter)].

42. $y = \frac{a\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)}{2}$ மற்றும் $y = \frac{a}{2}(2 + x^2/a^2)$ என்ற வளைகோடுகளுக்கு $(0, a)$ என்ற புள்ளியில் வளைவு சமம் எனக்காட்டு.

43. $x = at^3$, $y = at^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு S என்பது குவிவு; P என்பது ஏதாவதொரு புள்ளி. P-ல் வளைவு ஆரை $= 2a \operatorname{cosec}^3\psi = 2\frac{SP^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$ என்று காட்டு.

44. $y = \cosh \dfrac{x}{c}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு எந்தப் புள்ளியிலும் வளைவு ஆரையும், செங்கோட்டின் நீளமும் சமம் எனக்காட்டு.

45. நியூட்டனின் வழியைக் கொண்டு, $x = a\,(\theta + \sin\theta)$, $y = a\,(1 - \cos\theta)$ என்ற வளைகோட்டின் உச்சியில் வளைவு ஆரை $4a$ எனக்காட்டு.

46. $x = a_1 \cos n_1 t + a_2 \cos n_2 t$, $y = a_1 \sin n_1 t + a_2 \sin n_2 t$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, அதன் மையத்தில் இருந்து மிக அருகே, மிகத்தொலைவில் உள்ள புள்ளிகளில் வளைவு ஆரை $\dfrac{(n_1 a_1 \pm n_2 a_2)^2}{n_1^2 a_1 \pm n_2^2 a_2}$ என்று இருக்குமென்று நியூட்டனின் முறையில் நிரூபி.

47. $x = a \cos nt$; $y = b \sin 2nt$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, $t = 0$ என்ற புள்ளியில் வளைவு ஆரை என்ன ?

48. x, y என்ற மாறிகள் S-ன் சார்பலன்களானால்

$$\rho = \frac{dy/ds}{d^2x/ds^2} = \frac{dx/ds}{d^2y/ds^2}$$ என்று காட்டு ; மற்றும்

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$ என்று நிரூபித்து.

$x = c \log [s + \sqrt{s^2 + c^2}]$; $y = \sqrt{c^2 + s^2}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ρ-ஐக் கண்டுபிடி.

49. $y = a + bx + cx^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கும், $xy = 12$ என்ற வளைகோட்டிற்கும் (3, 4) என்ற பொதுவான புள்ளியில் வளைவு வட்டமும் பொதுவாக இருந்தால், a,b,c-ஐக் கண்டுபிடி.

50. $s = f(x)$ என்பது வளைகோட்டின் சார்பலனுனால்,

$$\rho = \left[\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1}\,\right] \Big/ \frac{d^2s}{dx^2}$$ எனக்காண்பி.

51. (a) $\dfrac{dp}{ds} = \dfrac{3pq^2 - (1 + p^2)r}{q^2}$ என்று நிரூபி.

இங்கு $p = \dfrac{dy}{dx}$; $q = \dfrac{d^2y}{dx^2}$; $r = \dfrac{d^3y}{dx^3}$

(b) $\rho = \dfrac{r}{\sin\phi\left(1 + \dfrac{d\phi}{d\theta}\right)}$ என்று நிரூபி.

(c) $\dfrac{1}{\rho} = \left\{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2 - \dfrac{d^2r}{ds^2}\right\}$

$\div \left\{1 - \left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ என்று நிரூபி.

(d) $u = \dfrac{1}{r}$ என்றால்

$\dfrac{1}{\rho} = \left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \div \left\{1 + \left(\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ என்று நிரூபி.

52. வளைவு மையத்தின் அச்சுக்கூறுகளைக் கண்டுபிடி :

(i) $y^2 = 4ax$; $(at^2 - 2at)$ ல்

(ii) $y = x^2$; $x = \frac{1}{2}$ ல்

(iii) $y^2 = 2px$; (x, y) ல்

(iv) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; t-ல்

(v) $x = 3t^2$; $y = 3t - t^3$; t-ல்

(vi) $xy = 4$; $(1, 4)$, $(2, 2)$-களில்

(vii) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; (x, y)-ல்

(viii) $y^3 = a^2x$; (x, y)-ல்

(ix) $x = 2t$; $y = \dfrac{3}{t}$; t-ல்

(x) $x = 4t$, $y = 3 + t^2$; t-ல்

(xi) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$-ல்

(xii) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$: t-ல்

(xiii) $y = \log\sec x$ $x = \pi/3$-ல்

(xiv) $x = a(\cos t + t \sin t)$
$y = a(\sin t - t \cos t)$; t-ல்

(xv) $xy = 2$; (2, 1)-ல்

(xvi) $x = 3\cos t + \cos 3t$, $y = 3\sin t - \sin 3t$; $t = 0$-ல்

53. $2xy = a^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வளைவுமையப்பாதை $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$ என்று காட்டு.

54. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ என்ற பரவளையத்திற்கு $\alpha + \beta = 3(x+y)$ என்று நிறுவு.

55. $x = 3\cos t + \cos 3t$; $y = 3\sin t - \sin 3t$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வளைவுமையப்பாதைக்கு $x = 2(3\cos t - \cos 3t)$ $y = 2(3\sin t + \sin 3t)$ என்பது துணையலகு சமன்பாடு (parametric equation) என்று நிறுவு. (M. Sc. 62)

56. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்கு வளைவு மையப்பாதைகளைக் கண்டுபிடி :

(a) $y^2 = 4ax$

(b) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

(c) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

(d) $x = a\left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$.

57. $xy = a^2/2$; $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்கிற இரு வளைகோடுகளுக்கும் வளைவுமையப்பாதை ஒன்றேதான் என்று காட்டு.

58. ஒரு உருள்வளையின் (cycloid) வளைவு மையங்கள் மற்றொரு சமமான உருள்வளையின் மேலிருக்கும் என்று நிரூபி.

59. $x^3 + y^3 = 3axy$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ என்ற புள்ளியில் வளைவு மையம் $\left(\frac{21a}{16}, \frac{21a}{16}\right)$ என்று காட்டு.

60. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$ என்பது வளைவு வட்டமானால் $\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2}{(y - \beta)^3}$ என்றும்

மற்றும் $\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{\frac{3}{2}}}{d^2y/dx^2}$ என்றும் நிரூபி.

61. $y^2 = 4ax$ என்ற வளைகோட்டிற்குள்ளேயே அதன் வளைவுமையப்பாதையின் ஒரு பகுதி உள்ளது. அதன் நீளத்தைக் கண்டுபிடி. (M.Sc. 65)

62. வளைவுமையத்தின் கூற்றுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம் என்று காட்டு.

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{d^2r/dy^2}{d^2x/dy^2}\,; \qquad \beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2r/dx^2}{d^2y/dx^2}$$

62. (a) $y = a \log \sec (x/a)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, y-அச்சிற்கு இணையான வளைவு நாணின் நீளம் ஒரு மாறிலி என்று காட்டு.

63. O என்பது ஆதி ; $P(a,a)$ என்பது $x^4 + y^4 = 2a^2xy$ என்ற வளைகோட்டின்மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. P-ல் வளைவுமையம், OP-ஐ, $6 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என்று காட்டு.

64. $y = -x^2 + x + 1$, மற்றும் $x = -y^3 + y + 1$ என்ற இரு வளைகோடுகளுக்கும் $(1, 1)$ என்ற புள்ளியில் வளைவு வட்டம் ஒன்றே என்று காட்டு.

65. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, என்ற வளைகோட்டிற்கு $(a/4, a/4)$ என்ற புள்ளியில் வளைவு வட்டத்தின் சமன்பாட்டை நிறுவு.

66. $x + y = ax^2 + by^2 + cx^3$ என்கிற வளை கோட்டிற்கு ஆதியில் எது வளைவு வட்டம் ?

67. $y = mx + x^2/a^2$ -க்கு ஆதியில் வளைவுவட்டம் எது?

68. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$-க்கு $(0,b)$ ல் வளைவு வட்டம் எது ?

69. $y^2 = 4ax$ க்கு $(at^2, 2at)$-ல் வளைவு வட்டம் எது ?

70. (i) $y = ae^{x/c}$ — க்கு, அச்சுகளுக்கு இணையான வளைவுநாண்கள் cx, cy என்றால்

$$\frac{1}{c_x^2} + \frac{1}{c_y^2} = \frac{1}{2ac_x}$$ என்று காட்டு.

(ii) $y = C\cosh(x/c)$க்கு $4c^2(c_x^2 + c_y^2) = c_y^4$ என்றும் காட்டுக

71. $r + a(1 - \cos\theta)$-க்கு துருவத்தினூடே செல்லும் நாணின் நீளம் எது ?

72. $r^m = a^m \cos m\theta$-க்கு துருவத்தினூடே செல்லும் நாணின் நீளம் எது ?

73. $\rho = f(r)$ என்பது வளைகோடானால், வளைவு நாண் $2f(r)/f'(r)$ என்று நிரூபி.

74. ஒரு வளைகோட்டின் சமன்பாடுகளில் $x' = ax$, $y' = by$ என்று பிரதியிட்டால், அதன் வளைவு கீழ்க்கண்ட விகிதத்தில் மாறும் எனக்காண்பி.

$$\frac{ab}{(a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi)}$$ [ψ என்பது துவக்க வளைகோட்டிற்கும், x அச்சிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம்.]

75. (Catenary) சங்கிலியத்தின் லம்ப உரை டிராக்டிரிக்ஸ் வளைகோடு (tractrix) என்று காட்டு :

சங்கிலியம் லம்பத்தின் சமன்பாடு : $y = a\cosh\frac{x}{a}$

டிராக்டிரிகஸ்ஸின் சமன்பாடு :

$$\left.\begin{aligned} x &= a\log\left(\tan\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \\ y &= a\sec\psi \end{aligned}\right\}$$

விடைகள்

1. 8; $\frac{8}{(65)^{3/2}}$; $\frac{8}{(65)^{3/2}}$ 2. $\frac{12}{(82)^{3/2}}$ 3. 1.

4. $180/(97)^{\frac{3}{2}}$ 5. $-1/2$

6. $\dfrac{1}{2a(\cos^4\theta_1 + \sin^4\theta_1)^{3/2}}$ 7. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

8. $\dfrac{24}{125}$ 9. $\cos x$ 10. $\dfrac{a^4 b^4}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}$

11. $\operatorname{sech}^2 x$ 12. $2/3a$ 13. $\dfrac{2b}{a^2}$ 14. $2/a$

15. $\dfrac{6}{5\sqrt{5}}$ 16. $\{6t(1+t^2)^2\}^{-1}$ 17. $2/a$

18. $\dfrac{r^2 + 2a^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$ 19. $\dfrac{3r}{a^2}$ 20. $\dfrac{4}{3a}\operatorname{cosec}^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$

21. $\dfrac{(9 - 6\cos\theta)}{a(5 - 4\cos\theta)^{3/2}}$ 22. $2/na$ 23. $\dfrac{1+r}{a^n r^{1-n}}$

24. $\dfrac{1}{r}\sin\alpha$ 25. $\dfrac{\theta^4}{a(1+\theta^2)^{3/2}}$ 26. $\dfrac{3}{2\sqrt{2ar}}$

27. $\dfrac{1}{2a}\cos^3\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ 28. $\dfrac{3p^2}{r^4}$

29. $\dfrac{l^2}{(r^2 e^2 + 2l_r - r^2)^{3/2}}$ 30. $\dfrac{a^2}{r^3}$

31. $\dfrac{1}{2a}\cos^3\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ 32. $\dfrac{(1 - e\cos\theta)^3}{a(1-e^2)(1-2e\cos\theta+e^2)^{3/2}}$

34. (a) $4\sqrt{2}$ (b) 6. (c) a

(d) $-2c\cosh^2\left(\dfrac{t}{c}\right)\sinh(t/c)$ (e) $-2a$ (f) $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$

(g) $4\sqrt{2a}$ (h) $\dfrac{(65)a^{3/2}}{536}$ (i) $2a^2/b$, $2b^2/a$

(j) $9a/10$ (l) $3a \sin t_1 \cos t_1$ (m) at_1

(n) $4a \cos (\theta_1/_2)$ (o) $125a/24$ (p) $-\operatorname{cosec} x$

(q) $a \sec^2\theta_1$ (r) $4a \cos (3\theta_1)$ (s) $3a \sin\theta_1$

(t) $\frac{3a}{8\sqrt{2}}$ (u) $a\, 5\sqrt{10}/6$ (v) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(v₁) $\frac{(1+m^2)^{3/2}}{4n\,(a-b)^2}$ (w) $\frac{-\sqrt{2}}{3}$ (x) 6

(z) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ (z_1) $a/2$.

35. $2a^2/b$, $2b^2/a$ 37. $(9/81 \pm 3)$ 47. $\frac{4b^2}{a}$

48. $\left(\frac{c^2+s^2}{c}\right)$ 49. $a = 12$, $b = -4$ $c = 4/9$

52. (i) $[(2a + 3at^2)\ (-2at^3)]$

(ii) $\left(-\frac{1}{2},\ 5/4\right)$ (iii) $\frac{3y^2+2p^2}{2p}$, $\frac{-y^3}{p^2}$

(iv) $[a \cos^3 t + 3a \cos t \ \sin^2 t,\ 3a \cos^2 t \sin t + a \sin^3 t]$

(v) $\frac{3}{2}(1 + 2t^2 - t^4) - 4t^4$ (vi) $(\frac{19}{2}, \frac{49}{8})$; $(4, 4)$

(vii) $x + 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$; $y + 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$.

(viii) $\frac{a^4 + 15y^4}{6a^2 y}$; $\frac{a^4 y - 9y^5}{2a^4}$

(ix) $\frac{12t^4+9}{4t^3}$; $\frac{27+4t}{6t}$ (x) $-t^3$, $11 + 3t^2$.

(xi) $\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta$, $\frac{b^2-a^2}{b}\sin 3\theta$.

(xii) $\{a(\theta + \sin\theta),\ -a(1 - \cos\theta)\}$

(xiii) $\left\{\frac{\pi}{2}\sqrt{2}, \log 2c\right\}$ (xiv) $(a \cos t, a \sin t)$

(xv) $\left(3\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}\right)$ (xvi) (410).

56. (a) $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$

(b) $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$

(c) $(ax)^{2/3} - (by)^{2/3} = (a^2 + b^2)^{2/3}$

(d) $y = a \cosh (x/a)$

57. $(x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = 2a^{2/3}$

61. $4a(3\sqrt{3} - 1)$ 62. நாண் $= 2a$

65. $(x - 3/4a)^2 + (y - \frac{3}{4}a)^2 = \frac{a^2}{2}$

66. $(a + b)(x^2 + y^2) = 2x + 2y$

67. $x^2 + y^2 = a(1 + m^2)(y - mx)$

68. $x^2 + y^2 - \frac{2(b^2 - a^2)}{b} y + (b^2 - 2a^2) = 0$

69. $x^2 + y^2 - 6at^2x - 4at + 4at^3y = 3a^2t^4$

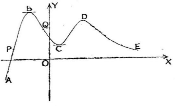
71. $4r/3$ 72. $\frac{2r}{(m + 1)}$

4. பெருமம், சிறுமம்

(MAXIMA & MINIMA)

§ 4.1 கூடும் சார்பலன்களும், குறையும் சார்பலன்களும் (Increasing functions and decreasing functions)

$f(x)$ என்பது x-மாறியின் ஒரு சார்பலன். அதன் வரைபடம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 4·1

x-மாறி இடமிருந்து வலப்பக்கத்திற்கு அதிகரித்துக் கொண்டு போகிறது. வரைபடம் சில இடங்களில் ஏறுமுகமாகவும் (A-யிலிருந்து B-வரை, C-யிலிருந்து D வரை), சில இடங்களில் (B-யிலிருந்து C-வரை, D-யிலிருந்து E-வரை) இறங்குமுகமாகவும் உள்ளதைக் காண்கிறோம். அதாவது, x அதிகரிக்கும் போது $f(x)$ என்கின்ற சார்பலனின் மதிப்பும் அதிகரிக்குமானால், வரைகோடு ஏறுமுகமாகயிருக்கும்; x அதிகரிக்கும் போது $f(x)$-ன் மதிப்பு குறைந்து வருமானல், வரைகோடு இறங்குமுகமாகயிருக்கும்.

ஏறுமுகமாகயிருக்கும் இடங்களில் (P ல்) தொடுகோடு வரையப்பட்டுள்ளது. இந்தத் தொடுகோடு x-அச்சை ஒரு குறுங் கோணத்தில் வெட்டுகிறது. வரைகோடு இறங்குமுகமாகயிருக்கும் பகுதியில் (Q-ல்) வரையப்படும் தொடுகோடு x-அச்சை ஒரு விரிகோணத்தில் வெட்டுகிறது என்றும் காண்கின்றோம். B, C எனும் புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் x-அச்சுடன் இணையாக இருக்கின்றன. அதாவது, சார்பலன் ஏறுமுகமாக இருக்கும் போது, தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் மிகை எண்ணு கவும், இறங்கு முகமாக இருக்கும் போது, தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் குறை எண்ணுகவும் இருக்கும். B, C, D...போன்ற இடங்களில் சாய்வு விகிதம் பூஜ்யமாக இருக்கும்.

இவைகளை இயற்கணித நோக்கில் பார்ப்போம். $x = a$ என்பது சார்பலனின் ஒரு புள்ளி $x = a + h$ என்க. ($h > 0$). அப்போது $f(a + h)$ என்பது $f(a)$-ஐ விட (i) அதிகமாக இருக் கலாம், (ii) குறைவாக இருக்கலாம். (iii) சமமாக இருக் கலாம்.

(i)-எனும் போது சார்பலன் ஏறுமுகமாக இருக்கும்; (ii) எனும் போது சார்பலன் இறங்குமுகமாக இருக்கும்; (iii) எனும்போது அது ஏருமலும், இறங்காமலும் நிலையாக (stationary) இருக்கும்.

$$\underset{h \to 0}{lt} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$ என்பதை நாமறிவோம்.

எனவே, $f'(a) > 0$ ஆயின், $x = a$ என்ற புள்ளியில் சார்பலன் ஏறுமுகமாக இருக்கும். அத்தகைய சார்பலனை நாம் **கூடும் சார்பலன்** அல்லது ஏறும் சார்பலன் என்கிறோம். அதேபோல் $f'(a) < 0$ எனின், அது இறங்கும் சார்பலன் அல்லது **குறையும் சார்பலன்** என்போம். $f'(a) = 0$ ஆயின், அது ஏருமலும், இறங்காமலும் நிலையாக இருக்கும்.

$f'(a)$ என்பது சாய்வு விகிதம் ஆதலால், சாய்வு விகிதம் மிகை எண்ணுனல் $f(x)$ என்பது $x = a$ என்ற புள்ளியில் கூடும் சார்பலனுகவும், குறை எண்ணுனல் குறையும் சார்பலனுகவும், சாய்வு விகிதம் பூஜ்யமானல் நிலையான சார்பலனுகவும் இருக்கும்.

இந்த முடிவுகள் (a, b) என்ற இடை வெளியில் (interval) ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் உண்மையாக இருக்குமானல் $f(x)$ சார்பலன் அந்த இடைவெளியில் குறைந்தோ, கூடியோ, நிலை

யாகவே இருக்கும். அம் முடிவுகளை வரையறுத்துக் கீழ்க்கண்ட வாறு விளக்கலாம் :

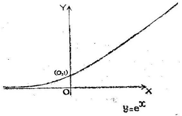
$a < x < b$ என்னும் இடைவெளியில் $f(x)$ என்ற சார்பலன் கூடும் சார்பலனாக இருக்கிறது என்றால் x_1, x_2, என்பவை அந்த இடைவெளியில் ஏதாவது இரு புள்ளிகளானால், $x_2 > x_1$ என்றிருந் தால், $f(x_2) > f(x_1)$ என்றாக வேண்டும். அதாவது $f'(x)$ என்பது அந்த இடைவெளியில் மிகை எண்ணாக வேண்டும். சாய்வு விகிதம் மிகை எண்ணாகும். 53

$x_2 > x_1$ என்றிருக்கும் போது, $f(x_2) < f(x_1)$ என்றானால் $f(x)$ சார்பலன் குறையும் சார்பலனாயிருக்கும். அதாவது, குறிப் பிட்ட இடைவெளியில் குறையும் சார்பலனில் $f'(x) < 0$ என்றி ருக்கும்; சாய்வு விகிதம் குறை எண்ணாகும்.

எ. கா. 1 :

$y = f(x)\, e^x$ என்ற சார்பலனில் $f'(x) = e^x$; e^x என்பது எப்போதும் மிகை எண்ணாகவே இருக்கும் ஆதலால், $f'(x) > 0$. ஆக இந்தச் சார்பலன் எப்போதும் கூடும் சார்பலனாகவே இருக்கும்; அதன் வரைகோடு எப்போதும் ஏறுமுகமாகவே இருக்கும்.

(பார்க்க : படம் : 4·2)



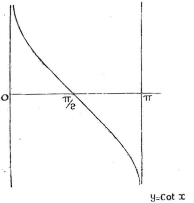
படம் 4·2

எ. கா. 2 :

$y = f(x') = \cot x$

இங்கு $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$. எனவே, எப்போதும் $f'(x) < 0$ குறை எண்ணாகவே இருக்குமாதலால், வரைபடம் எப்போதும் இறங்குமுகமாகவே இருக்கும்.

(பார்க்க : படம் : 4·3)



படம் 4·3

—வெளியில் சார்பலன்கள் இது போன்று முழுவதும் இறங்குமுகமாகவோ, அல்லது ஏறுமுகமாகவோ இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை. முதல் படத்தில் காட்டியிருப்பதைப் போன்று சில பகுதிகளில் இறங்குமுகமாகவும், சில பகுதிகளில் ஏறுமுகமாகவும், சில புள்ளிகளில் நிலையாகவும் இருக்கலாம். அடுத்த எடுத்துக்காட்டு இதனை வலியுறுத்தும்.

எ. கா. 3 :

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ என்ற சார்பலனைக் கவனித்து, அதன் வரைபடத்தை வரைக.

குறிப்பிட்ட சில புள்ளிகளில் சார்பலனின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

x	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-7\frac{1}{8}$	-1	3	1	-1	3

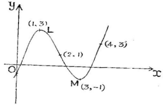
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$x = 1$ அல்லது $x = 3$ என்ற புள்ளிகளில் $f'(x) = 0$ ஆதலால் இவ்விரண்டும் நிலைப்புள்ளிகள்.

$x < 1$ என்றால் $f'(x) > 0$ ஆகிறது. எனவே, இந்த இடை வெளியில் வரைபடம் ஏறுமுகமாயிருக்கும். அதேபோல் $x > 3$ இடைவெளியிலும் $f'(x) > 0$.

x என்பது 1-க்கும், 3-க்கும் இடையே இருந்தால் $f'(x) < 0$; எனவே வரைபடம் இறங்குமுகமாயிருக்கும். இந்த முடிவுகளைக் கொண்டு படம் வரையப்பட்டுள்ளது.



படம் 4·4

§ 4·2 **பெருமமும், சிறுமமும்**

இப்பொழுது நிலைப்புள்ளிகளைக் கவனிப்போம். இத்தகு புள்ளிகளில், சார்பலனது கூடும் வகையிலிருந்து குறையும்

வகைக்கோ (படம் 4·1 புள்ளி B, D-ல், படம் 4·4 புள்ளி L-ல்) அல்லது குறையும் வகையிலிருந்து கூடும் வகைக்கோ (படம் 4-1 C-ல்; படம் 4-4 புள்ளி M-ல்) மாறுகிறது. இங்கு இந்தப் புள்ளிகளிலே சார்பலனின் மதிப்பை மற்ற அடுத்தடுத்த புள்ளி களில் சார்பலன்களின் மதிப்புடன் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்போம்.

படம் 4·1 புள்ளி B-ல், $f(x)$-ன் மதிப்பு, அதன்முன்பு உள்ள அல்லது அடுத்துள்ள சில புள்ளிகளின் மதிப்பைவிட அதிகமா யிருக்கிறது. இத்தகைய புள்ளியை **'சார்புப்பெருமம்'** (Relative Maximum) அல்லது **'பெருமம்'** என்று குறிப்பிடுவோம்.

அதாவது $x = a$ என்பது ஒரு புள்ளியானால் $f(a) \geq f(a+h)$ என்றிருக்க வேண்டும்; h என்பது மிகச்சிறிய குறை எண்ணுகவோ, மிகை எண்ணுகவோ இருக்கலாம். மற்றும் $f(x)$ கூடும் வகையிலிருந்து குறையும் வகைக்கு மாறவேண்டும். அதாவது $f'(x)$ என்பது $x = a$-ல், மிகை எண்ணிலிருந்து குறை எண்ணுக வேண்டும். அப்படியானல், $f'(x)$ என்பது ஒரு குறையும் சார்பலனுக வேண்டும். எனவே $x = a$-ல் $f''(x) > 0$.

இதேபோல், $x = c$-ல் $f(c) \leq f(c+h)$ [h மிகை அல்லது குறை எண்] ஆனுல், c-ஐ **சார்புச்சிறுமம்** அல்லது **சிறுமம்** என்று கூறுவோம். இப்போது வரையறைகளை நிறுவலாம் :

(A) $x = a$ என்பது $f(x)$-ன் ஒரு பெருமப்புள்ளி என்ருல் கீழ்க்கண்ட ஏதாவதொரு நிபந்தனை சரியாக இருக்கலாம்:— (54)

(i) $f(a) \geq f(a+h)$; h என்பது மிகச்சிறிய குறை அல்லது மிகை எண்.

அல்லது

(ii) $f'(a) = 0$; மற்றும் $f'(x)$ என்பது மிகை எண்ணி லிருந்து குறை எண்ணுக $x = a$ என்னும் போது மாற வேண்டும்.

அல்லது

(iii) $f'(a) = 0$. $f''(a) < 0$.

(B) $x = c$ என்பது $f(x)$-ன் ஒரு சிறுமம் எனில்,

(i) $f(c) \leq f(c+h)$; h என்பது மிகச்சிறிய குறை அல்லது மிகை எண்,

அல்லது

(ii) $f'(c) = 0$; **மற்றும்** $f'(x)$ **என்பது குறை எண்ணிலிருந்து மிகை எண்ணாக** $x = c$ **- ல் மாறவேண்டும்.**

அல்லது

(iii) $f'(c) = 0, f''(c) > 0$ (55)

குறிப்பு 1 : பெருமம் அல்லது சிறுமப் புள்ளிகளை சார்புடையன வாகவே (Relative) கணக்கிடுவோம். எனவே, ஒரு பெருமப் புள்ளியில் $f(x)$-ன் மதிப்பு, மற்றொரு சிறுமப் புள்ளியில் $f(x)$-ன் மதிப்பைவிடக் குறைவாகவும் இருக்கலாம்.

ஒரு புள்ளி $x = c$, (a, b) என்ற இடைவெளியில் தனிப்பெரும் புள்ளியாக இருக்க வேண்டுமானால் (Absolute Maximum) அந்த இடைவெளியில் எல்லா புள்ளிகளுக்கும் $f(c) \geq f(x)$ ஆக வேண்டும்.

அதேபோல் இடைவெளியின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் $f(d) \leq f(x)$ ஆனால், $x = d$ என்பது அந்த இடைவெளியில் தனிச் சிறுமப் புள்ளியாகும்.

2. பெருமப்புள்ளியில் சார்பலனின் மதிப்பை **பெருமதிப்பு** அல்லது **மீப்பெருமதிப்பு** என்போம்; அதேபோல் சிறுமதிப்பு, அல்லது மீச்சிறுமதிப்பு கிடைக்கும்.

3. பெருமப்புள்ளிகள், சிறுமப்புள்ளிகள் இரண்டையும், பொதுவாக நிலைப்புள்ளிகள் (Stationary points) என்போம்.

4. $f'(x) = 0, f''(x) = 0$ என்றால் பெருமப்புள்ளியாக இருக்காது. சிறுமப்புள்ளியோ வகையிட முடியாது. இரண்டும் இல்லாமலும் இருக்கலாம் அவைகளைப் பற்றி பின்பு விரிவாகக் காண்போம்.

5. இரண்டு பெருமப்புள்ளிகளோ அல்லது இரண்டு சிறுமப் புள்ளிகளோ அடுத்தடுத்து வரமுடியாது. பெருமப்புள்ளிகளும், சிறுமப்புள்ளிகளும் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று வரவேண்டும் (They must occur alternately). ஏனெனில், ஒரு சிறுமப்புள்ளியில் சார்பலனது இறங்குமுகமாகவிருந்து ஏறுமுகமாக மாறுகிறது. எனவே, மறு நிலைப்புள்ளிக்கு வர அது, ஏறுமுகத்திலிருந்து இறங்குமுகத்திற்கு மாறவேண்டும். அதாவது, ஒரு பெருமப் புள்ளி அடுத்து இருக்க வேண்டும்.

எ. கா. 4.

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$-ன் சிறுமபெருமப் புள்ளிகளை யும், மதிப்புகளையும் காண்க.

$$y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

$$f'(x) = y' = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \text{ என்று கொள்ள}$$

$$(x^2 - x - 2) = 0 \text{ அதாவது } x = +2, -1$$

என்று கிடைக்கும். எனவே, இவ்விரண்டு புள்ளிகளில் தான் பெருமம், சிறுமம் இருக்க வேண்டும்,

$$y'' = f''(x) = 12x - 6.$$

$x = 2$ என்று பிரதியிட, $f''(x) = 18 > 0$. எனவே $x = 2$ என்பது ஒரு சிறுமப் புள்ளி.

சிறுமதிப்பு $= f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = \mathbf{-15}$.

$x = -1$ என்று பிரதியிட, $f''(x) = -18 < 0$. எனவே $x = -1$ என்பது ஒரு பெருமப்புள்ளி.

பெருமதிப்பு $= f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = \mathbf{12}$

எ. கா. 5:

சதுரமாயும், மூடி இல்லாமலும் இருக்கும் ஒரு மரப் பெட்டியைச் செய்ய வேண்டும். அதன் கன அளவு (volume) 108 க. அடி இருக்கவேண்டுமானால், தேவைப்படும் மரப் பலகை களின் மீச்சிறுமதிப்பென்ன ?

பெட்டியின் அகலம் x-என்றும், உயரம் y என்றும் கொள் வோம்.

பெட்டியின் க. அளவு (volume) $= x^2 y = 108$

$$\text{எனவே, } y = \frac{108}{x^2}$$

தேவைப்படும் மரப்பலகைகளின் அளவு A என்றால்

A = கீழ்சதுரப்பரப்பு + 4 பக்கங்களின் பரப்பு $= x^2 + 4xy$

$y = \dfrac{108}{x^2}$ என்று பிரதியிட

$$\therefore A = x^2 + 4x\,\frac{108}{x^2}$$

அதாவது, $A = x^2 + \frac{432}{x}$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

மீச்சிறு மதிப்புக்கு $\frac{dA}{dx} = 0,\ \frac{d^2A}{dx^2} > 0.$

$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{432}{x^2} = 0$ என்றால் $x = 6$ எனக் காண்கிறோம்

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2 + \frac{864}{x^3}$$

$x = 6$ எனும்போது, $\frac{d^2A}{dx^2} > 0.$ எனவே $x = 6$ என்பது ஒரு சிறுமப் புள்ளிதான்.

பலகைகளின் அளவின் மீச்சிறுமதிப்பு

$$= 36 + \frac{432}{6} = 108 \text{ ச. அடி.}$$

எ. கா. 6 :

50 அடி நீளமுள்ள ஒரு ஏணி, சமதரையில் வைக்கப்பட்டு அதன் நுனி செங்குத்தான சுவற்றின்மேல் சாய்த்து வைக்கப் பட்டுள்ளது. அதன் கீழ் நுனியை நிமிடத்திற்கு மூன்று அடி வீதம் இழுத்தால் (i) அதன் மேல்நுனி எவ்வளவு வேகத்தில் கீழிறங்கும்? (ii) அது 18 அடி உயரத்தில் இருக்கையில் கீழிறங் கும் வேகம் என்ன? (iii) மேல், கீழ் இரு நுனிகளும் ஒரே வேகத்தில் எப்பொழுது நகரும்? (iv) மேல்நுனி எப்பொழுது நிமிடத்திற்கு 4 அடி வீதம் கீழிறங்கிக் கொண்டிருக்கும்?

ஏணி AB என்றும், சுவற்றின் அடிப்பாகத்தை C என்றும் வைப்போம். [படத்தை நீங்களே வரையலாம்.] $AC = x$, $CB = y$ என்க.

$$\therefore\ 50^2 = x^2 + y^2$$

அல்லது $y = \sqrt{50^2 - x^2} = \sqrt{2500 - x^2}$

இதனை t- என்ற மாறியைக் கொண்டு வகையிட,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-x}{\sqrt{2500 - x^2}}\,\frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

(i) $\frac{dx}{dt} = 3$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-3x}{\sqrt{2500 - x^2}}$$

இது மேல்நுனி கீழிறங்கி வரும் வேகமாகும்.

$\left(\frac{dy}{dt}\right.$ என்பது குறை ?$\left.\right)$

(ii) $\frac{dx}{dt} = 3$; $x = 18$.

எனவே, $\frac{dy}{dt} = \frac{-54}{8\sqrt{34}} = \frac{-27}{4\sqrt{34}}$

மேல்நுனி நிமிடத்திற்கு $\frac{27}{4\sqrt{34}}$ அடிகள் இறங்கும்.

(iii) $\frac{dx}{dt}$ — ம், $\frac{dy}{dt}$ ம் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே, $\frac{x}{\sqrt{2500 - x^2}} = 1$, $x^2 = 2500 - x^2$

அல்லது $x = 25\sqrt{2}$

அதாவது, ஏணியின் கீழ்நுனி, சுவற்றிலிருந்து $25\sqrt{2}$ அடி இருக்கும்போது, இருநுனிகளும் ஒரே வேகத்தில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும்.

(iv) $\frac{dy}{dt} = 4$ என்று இருக்க வேண்டும்.

$\frac{dx}{dt} = 3$ என்று முன்பே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இந்த மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட

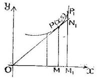
$4 = \frac{-x \cdot 3}{\sqrt{2500 - x^2}}$ இந்தச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $x = 40$

என்று கிடைக்கும்.

அதாவது, ஏணியின் கீழ் நுனி சுவரிலிருந்து 40 அடி தூரத்தில் இருக்க வேண்டும்.

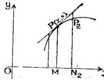
§ 4·3 வளைகோட்டின் வளைவு திசைகள் : குழிவு, குவிவு (Direction of bending of a curve, concavity, convexity).

வளைகோட்டின் தொடுகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் பற்பல புள்ளிகளில் மாறிக்கொண்டே இருக்கும். தொடுகோடு வளை கோட்டின் கீழிருக்கும்போது, வளைகோடு மேற்பக்கத்திற்குக் குழிவாக இருக்கும். தொடுகோடு வளைகோட்டின் மேற்புற மிருந்தால் வளைகோடு [கீழ்ப்புறத்திற்குக் குழிவாக (concave downwards) அல்லது மேற்புறத்திற்குக் குவிவாக (convex upwards) இருக்கும் [பார்க்க : படம் 4·5 (a), (b)].



மேற்புறத்திற்குக் குழிவு

படம் 4·5 (a)



மேற்புறத்திற்குக் குவிவு

படம் 4·5 (b)

(a)-ல், P-என்பது AP-என்ற வில்லில் இருக்கும்போது, சாய்வுவிகிதம் கூடுகிறது. எனவே, $\frac{dy}{dx}$ கூடுகிறது. ஆக, மேற்புறத்திற்குக் குழிவு இருக்க வேண்டுமானல், $\frac{dy}{dx}$ அதிகரித்துக் கொண்டு போக வேண்டும். அல்லது $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ என்றிருக்க வேண்டும். அதே போல், $\frac{dy}{dx}$ குறைந்து கொண்டே வரும்போது, அல்லது $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ என்னும்போது வளைகோடு மேற்புறத்திற்குக் குவிவாக இருக்கும்.

படம் (a)-ல், P_1 என்பது P-ஐ நெருங்கியுள்ள வளைகோட்டின் மீதுள்ள புள்ளி ; P_1M_1 என்பது நிலைத்தூரம்.

தொடுகோட்டிற்கும், வளைகோட்டிற்கும் P_1-ல் நிலைத்தூரங்களின் வித்தியாசம் $= N_1P_1 = M_1P_1 - M_1N_1$.

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y - Y = f'(x)\ [x - X]$. இங்கு $X = x + h$ ஆதலால் $M_1N_1 = y + h\cdot$

$f'(x) = f(x) + hf'(x)$.

எனவே $N_1P_1 = f(x+h) - [f(x) + hf'(x)]$

ஆனால் $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x)$

$$+ \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots\ldots$$

(டெய்லரின்விரித்தல் வாய்ப்பாடு)

$$\therefore\ N_1P_1 = \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots\ldots\ldots$$

h என்பது சிறியதானால், h^3, h^4 என்பவைகளைக் கணக்கிடத் தேவையில்லை. எனவே N_1P_1 என்பது (h-மிகை ஆனாலும், குறை ஆனாலும்) $f''(x)$-ன் தன்மையையொட்டியிருக்கும். $f''(x)$ என்பது மிகையானால் N_1P_1-ம் மிகையாயிருக்கும். $f''(x)$ என்பது குறையானால் N_1P_1-ம் குறையாயிருக்கும்.

அதாவது, வளைகோடு குழிவாயிருக்க $f''(x) > 0$, குவிவாயிருக்க $f''(x) < 0$ என்ற கோட்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. (56)

குறிப்பு : இங்கு குழிவு, குவிவுகளை x-அச்சைக்கொண்டு மேற்புறத்திற்கு மட்டும் குறித்துள்ளோம். இதேபோல், y-அச்சிற்கும் குழிவு, குவிவுகளை வரையறுக்கலாம்.

§ 4·4 வளைவு மாற்றம் : (Inflexion)

ஒரு வளைகோட்டிற்கு $f''(x) = 0$ என்று சில புள்ளிகளிலிருக்கலாம். அவைகளின் தன்மைகளை ஆராய்வோம்.

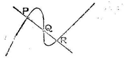
மேற் கூறியதில்,

$$N_1P_1 = \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots$$

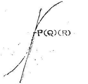
$f''(x) = 0$ ஆனால், N_1P_1-ன் குறி (sign), h-உடன் மாறும். h-மிகையானால் N_1P_1-ம் மிகை. h-குறையானால், N_1P_1-ம் குறை

யாகும். அதாவது, $f''(x) > 0$ என்னும் போது இரு நிலைத்தூரங்களுக்கான வித்தியாசம் ($N_1 P_1$ போன்றவை) குறையிலிருந்து மிகையாக மாறும்—குழிவிலிருந்து குவிவாகும். அதாவது, தொடுகோடு வளைகோட்டைத் தாண்டிச் செல்லும்; $f'''(x) < 0$ என்றால், குவிவிலிருந்து குழிவாக மாறும்—தொடுகோடு வளைகோட்டைத் தாண்டும்.

$f''(x) = 0$ என்ற புள்ளிகளில், வளைகோட்டின் வளைவு மாறுகிறது. இவற்றை வளைவு மாற்றப்புள்ளிகள் (Points of inflexion) என்று கூறுவோம். P, Q, R என்பன மூன்று அடுத்தடுத்த புள்ளிகள் என்க. இப்பொழுது R, Q என்பன வளைகோட்டையொட்டியே



படம் 4·6 (a)



படம் 4·6 (b)

P-அருகில் வரட்டும். கடைசியில், PQ, QR என்ற இரு தொடுகோடுகளும் ஒன்றோடொன்று பொருந்தும் (are coincident). தொடுகோடு நிலையானதாயிருக்கும் (stationary) என்று கூறுவோம்.

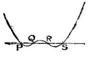
எனவே, வளைவு மாற்றப்புள்ளிகளில், மூன்று அடுத்தடுத்தப் புள்ளிகள் பொருத்தமாயிருக்கும் (Three consecutive Points will be coincident). தொடுகோடு வளைகோட்டைத் தாண்டும்.

(பார்க்க : படம் 4·6 b)

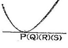
§ 4·5 உயரப்படி சிறப்புப்புள்ளிகள் (singularities of higher orders):

(a) அலைபாய்வுப் புள்ளி (Point of undulation); நான்கு அடுத்தடுத்த புள்ளிகள் ஒரே இடத்தில் பொருத்தமாயிருப்பின் அந்தப் புள்ளியை அலைபாய்வுப் புள்ளி (Point of undulation) என்போம். அத்தகைய புள்ளியில் தொடுகோடு, வளை

கோட்டைத் தாண்டாது. அங்கு $f'''(x) = 0$; $f''(x) = 0$ ஆக இருக்கும்.



படம் 4·7 (a)



படம் 4·7 (b)

(b) **பொது விதிகள் :** $x = a$ என்ற புள்ளியில் $f'(a), f''(a), f'''(a) \ldots f^{n-1}(a)$ என்பவை பூஜ்யமாகவும், $f^n(a)$ பூஜ்யமில்லாமலும் இருக்கட்டும். டெய்லர் விரித்தல் வாய்ப்பாட்டின்படி :

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \ldots$$

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புக்களைப் பிரதியிட,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^n}{n!} f^n(a) \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே, $\{f(a+h) - f(a)\}$-ன் குறியும், $f^n(a)$-யின் குறியும் (signs) ஒன்றாக இருக்கவேண்டுமென்றால், n-என்பது ஒரு இரட்டை எண்ணாக வேண்டும். அப்பொழுது $\{f(a+h) - f(a)\}$ என்பதன் குறி, மாறாமல் இருக்கும். அதாவது $f^n(a) < 0$ ஆனால், $\{f(a+h) - f(a)\} < 0$, h மிகையாயிருப்பினும் சரி, குறையாயிருப்பினும் சரி. எனவே, அத்தகைய புள்ளி ஒரு பெருமப்புள்ளியாகும் [$f(a+h) < f(a)$ என்பதனால்]. அதேபோல், $f''(a) > 0$ ஆயின், அந்தப் புள்ளி ஒரு சிறுமப் புள்ளியாகும் [$f(a+h) > f(a)$]

n-என்பது ஒற்றை எண்ணானால், $\{f(a+h) - f(a)\}$ என்பதன் குறி, h-ன் குறியையொட்டி மாறும். எனவே, அத்தகைய புள்ளிகள் வளைவுமாற்றுப் புள்ளிகளாகவோ, அலைபாய்வுப் புள்ளிகளாகவோ இருக்க வேண்டும். முடிவாக :

$x = a$-ல் $f'(a) = f''(a) = \ldots\ldots = f^{n-1}(a) = 0$ ஆகவும்
$f^n(a) \neq 0$ ஆகவும் இருந்தால் (57)

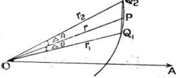
(i) n-இரட்டை எண்ணும் போதுதான் சிறுமம், பெருமங்கள் நிகழலாம். $f^n(a) < 0$ ஆனுல் $x = a$ என்பது ஒரு பெருமப் புள்ளி; $f^n(a) > 0$ ஆனுல் $x = a$ என்பது ஒரு சிறுமப்புள்ளி

(ii) n ஒற்றை எண்ணுனல், சிறுமம், பெருமங்கள் நிகழாது, அத்தகைய புள்ளிகள் வளைவுமாற்றுப் புள்ளிகளாகவோ, அலைபாய்வுப் புள்ளிகளாகவோ இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு : $\frac{dy}{dx}$ என்பது கந்தழி (infinite) ஆகிவிட்டால், தொடு கோடுகள் y- அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும். அத்தகைய வேளைகளில், நாம் y-ஐ சார்பிலா மாறியாகவும், x-ஐ சார்புடைய மாறியாகவும் மாற்றிக் கொள்ளலாம். x-ஐயும், y-ஐயும் இடம் மாற்றி குழிவு, குவிவு, வளைவுமாற்றம் முதலியனவற்றிற்கு நிபந்தனைகள் நிறுவலாம்.

§ 4·6 போலார் வளைகோடுகள் : குழிவு, குவிவு

x-அச்சு அல்லது y-அச்சையொட்டிப் பார்க்கும் பொழுது குழிவு, குவிவுப் புள்ளிகளைக் கண்டோம். இந்த வரையறைகள், வளைகோட்டின் சமன்பாடு கார்ட்டீஸியன் வகையில் இருந்தால் தான் பயன்படும்; வளைகோடு போலார் வடிவத்திலிருந்தால், குழிவு, குவிவுகளை துருவப்புள்ளியையொட்டி வரையறுக்க வேண்டும்.



படம் 4·8

வளைகோட்டின் சமன்பாடு $u = \frac{1}{r} = f(\theta)$ என்றிருக்கட்டும்.

$P(r, \theta)$-ஐ அடுத்த இரு புள்ளிகள் $Q_1(r_1, \theta_1)$, $Q_2(r_2, \theta_2)$.

P-ன் இருபக்கங்களில் இருக்கட்டும், $\theta_1 = \theta - \triangle\theta$; $\theta_2 = \theta + \triangle\theta$. வளைகோடு P-ல் O-வை யொட்டிக் குழிவாயிருக்கிறதென்றால், $\triangle Q_1 OP + \triangle Q_2 OP > \triangle OQ_1 Q_2$ என்றும், $\triangle Q_1 OP + \triangle Q_2 OP < \triangle OQ_1 Q_2$ என்றால் குவிவாக இருக்கிறதென்றும் தெரிகிறது

எனவே குழிவிற்கு

$$\tfrac{1}{2} r_1 r \sin(\triangle\theta) + \tfrac{1}{2} r_2 r \sin(\triangle\theta) > \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \sin(2\triangle\theta)$$

$$r(r_1 + r_2) > 2 r_1 r_2 \cos(\triangle\theta)$$

$u_1 = \dfrac{1}{r_1}$; $u_2 = \dfrac{1}{r_2}$; $u = \dfrac{1}{r}$ என்று பிரதியிட

$$u_1 + u_2 > 2u\cos(\triangle\theta) \qquad (1)$$

$$u_1 = f(\theta + \triangle\theta) = f(\theta) - (\triangle\theta)\cdot\frac{df}{d\theta} + \frac{(\triangle\theta)^2}{2!}\cdot\frac{d^2f}{d\theta^2}$$

$\ldots\ldots + \ldots\ldots$

$$u_2 = f(\theta + \triangle\theta) = f(\theta) + (\triangle\theta)\cdot\frac{df}{d\theta} + \frac{(\triangle\theta)^2}{2!}\cdot\frac{d^2f}{d\theta^2} + + \ldots\ldots$$

எனவே, $u_1 + u_2 = 2\left[f(\theta) + \dfrac{(\triangle\theta)^2}{2!}\dfrac{d^2f}{d\theta^2} + \ldots\ldots\right]$

இதனையும் $u = f(\theta)$ என்பதனையும் (1)-ல் பிரதியிட,

$$u + \frac{(\triangle\theta)^2}{2!}\frac{d^2u}{d\theta^2} > u\cos(\triangle\theta)$$

$$= u\left[1 - \frac{(\triangle\theta)^2}{2!} + \frac{(\triangle\theta)^4}{4!} - + \ldots\ldots\right]$$

அதாவது $\dfrac{(\triangle\theta)^2}{2!}\left[\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] > u\cdot\dfrac{(\triangle\theta)^4}{4!} \ldots\ldots$

அல்லது $u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2} > 0$

என்று வருகிறது. எனவே, ஒரு குறித்தபுள்ளியில்

$u = \frac{1}{r} = f(\theta)$ என்ற வளைகோடு

(i) குழிவாக இருக்கவேண்டுமானால் $u + \frac{d^2u}{d\theta^2} > 0$

(ii) குவிவாக இருக்கவேண்டுமானால் $u + \frac{d^2u}{d\theta^2} < 0$ (58)

(iii) வளைகோட்டிற்கு அந்தப் புள்ளியில் வளைவுமாற்றமிருக்க

$u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$ என்பதன் குறி (sign) மாறவேண்டும்; புள்ளிக்குச் சிறிது முன்பு இருக்கும் குறியும், சற்றுபின்பு இருக்கும் குறியும் வெவ்வேறாக இருக்கவேண்டும். (59)

இதனால் $u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$ என்பதும் புலனாகிறது.

எ. கா. 7.

$y = e^x$ என்ற வளைகோடு எப்பொழுதும் குழிவாகவே இருக்க வேண்டும் என்று காட்டு.

குழிவிற்கு $f''(x) > 0$ என்றாகவேண்டும். இங்கு $f''(x) = e^x$. மற்றும் எப்பொழுதும் $e^x > 0$. எனவே, வளைகோடு எப்பொழுதும் மேற்புறத்திற்குக் குழிவாகவே இருக்கும்.

எ. கா. 8.

$(x^2 + 4x + 5)\, e^{-x}$ என்ற வளைகோடு எங்கெங்கு குழிவாகவும் எங்கெங்கு குவிவாகவும் எங்கு வளைவுமாற்றம் கொண்டும் இருக்கிற தென்று பார்.

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)\, e^{-x}$$

$$f'(x) = (x^2 + 4x + 5)(-e^{-x})$$

$$+ (e^{-x})(2x + 4) = e^{-x}[-x^2 - 2x - 1]$$

$$f''(x) = (-x^2 - 2x - 1)\quad(-e^{-x}) + e^{-x}(-2x - 2)$$

அல்லது $f''(x) = e^{-x}[x^2 - 1]$.

$x^2 - 1 = 0$ என்னும்போது, $f'(x) = 0$. எனவே, $x = 1$, $x = -1$ என்ற இருபுள்ளிகள்தாம் வளைவுமாற்றப் புள்ளிகள்.

$f''(x) > 0$ என்றுக வேண்டுமென்றுல் $e^{-x}(x^2 - 1) > 0$, அல்லது $x^2 - 1 > 0$; அதாவது $x^2 > 1$. எனவே, $(-\infty, -1)$ மற்றும் $(1, \infty)$ என்ற இரு இடைவெளிகளில் வளைகோடு குழிவாக இருக்கும். $x^2 - 1 < 0$ ஆக இருக்கும்போது, அதாவது $(-1, 1)$ இடைவெளியில் குவிவாக இருக்கும்.

எ. கா. 9.

கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்கு வளைவுமாற்றப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $x = 2a \cot t$, $y = 2a \sin^2 t$. (ii) $r^2\theta = a^2$

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4a \sin t \cos t}{-2a \operatorname{cosec}^2 t} = -2 \sin^3 t . \cos t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(-2 \sin^3 t . \cos t) . \frac{dt}{dx}$$

$$= (2 \sin^4 t - 6 \sin^2 t \cdot \cos t)\left(\frac{-2a}{\sin^2 t}\right)$$

$$= 4a(3 - 4 \sin^2 t)$$

எனவே, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ என்று பிரதியிட $\sin t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ அல்லது $t = \dfrac{\pi}{3}$. ஆகவே, $t = \dfrac{\pi}{3}$-ல் வளைகோட்டிற்கு வளைவு மாற்ற முள்ளது.

(ii) $r^2\theta = a^2$. இதனை $u = \dfrac{1}{r} = f(\theta)$ என்ற வடிவத்தில் எழுதவேண்டும்.

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\theta}{a^2} \text{ அல்லது } u = \frac{1}{r} = \frac{\theta^{\frac{1}{2}}}{a}$$

வளைவு மாற்றத்திற்கு $u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2\theta^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{-1}{4a\theta^{\frac{3}{2}}}$$

எனவே, $u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2a\theta^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4a\theta^{\frac{3}{2}}}$

$$= \frac{2\theta - 1}{4a\theta^{\frac{3}{2}}} = 0 \text{ என்றால்}$$

$$\theta = 1/2.$$

$\therefore$ $\theta = 1/2$-ல் வளைவு கோட்டின் வளைமாற்றப் புள்ளியுள்ளது.

எ. கா. **10.**

$y^2 = (x - a)^2 (x - b)$-ன் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள் $3x + a = 4b$ என்ற நேர்கோட்டின் மேல் பொருந்தியிருக்கும் என்று காட்டு.

$$f(x) = y = (x - a)\sqrt{x - b}$$

$$f'(x) = (x - a)\frac{1}{2\sqrt{x - b}} + \sqrt{x - b}$$

$$= \frac{3x - a - 2b}{2\sqrt{x - b}}$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x - b}\,(3) - (3x - a - 2b)\dfrac{1}{(x - b)^{1/2}}}{4(x - b)}$$

$$= \frac{6(x - b) - (3x - a - 2b)}{4(x - b)^{3/2}} = 0$$

என்றால் $3x - 4b + a = 0$ என்றாகிறது. அதாவது, வளைவு மாற்றுப்புள்ளிகள் $3x + a = 4b$ என்ற வளைகோட்டின் மேலிருக்கும்.

எ. கா. 11.

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 15$ என்ற வளைகோட்டிற்குச் சிறும, பெருமப்புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி.

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 15$$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 0 \text{ என்று கொண்டால்,}$$

$$x = 0,\ x = 4 \text{ என்று இருமதிப்புகள்}$$

கிடைக்கும். இவையிரண்டும் தான் நிலைப்புள்ளிகள்.

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2$$

$x = 0$ **என்னும்பொழுது:** $f''(x) = 0$. எனவே, சிறுமமா, பெருமமா என்று சொல்லமுடியாது.

$$f'''(x) = 60x^2 - 120x = 0$$

$$f^{iv}(x) = 120x - 120 = -120 < 0$$

எனவே, $f^{iv}(x) < 0$ என்று கிடைக்கிறது. IV — 4 நிபந்தனைகளின்படி, n-இரட்டை எண்ணாதலாலும் $f^{iv}(x) < 0$ ஆதலாலும் $x = 0$ என்பது பெருமப்புள்ளி.

$x = 4$**என்னும்பொழுது:** $f''(x) = 1280 - 960 = 320 > 0$. எனவே, இது ஒரு சிறுமப்புள்ளி.

எ. கா. 12.

$f(x) = x(a+x)^2(a-x)^3$-ன் சிறுமம், பெருமங்கள் எவை ?

சார்பலனை விரிவாக்க,

$$f(x) = -x^6 + ax^5 + 2a^2x^4 - 2a^3x^3 - a^4x^2 + a^5x$$

$$f'(x) = -6x^5 + 5ax^4 + 8a^2x^3 - 6a^3x^2 - 2a^4x + a^5$$

$$= (x^2 - a^2)(-6x^3 + 5ax^2 + 2a^2x - a^3)$$

$$= (x^2 - a^2)(x - a)(-6x^2 - ax + a^2)$$

$$= (x^2 - a^2)(x - a)(a - 3x)(a + 2x)$$

எனவே, $f'(x) = 0$ ஆகவேண்டுமென்றால்,

$x = a$, $x = -a$, $x = +a/3$, $x = -a/2$ என்ற நான்கு மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

மறுபடியும் வகையிட,

$$f''(x) = -30x^4 + 20ax^3 + 24a^2x^2 - 12a^3x - 2a^4$$

$x = a$ எனப் பிரதியிட்டால் $f''(x) = 0$

எனவே, இந்தப்புள்ளி சிறுமமா, பெருமமா என்று சொல்ல முடியாது.

மறுமுறை வகையிட,

$$f'''(x) = -120x^3 + 60ax^2 + 48a^2x - 12a^3$$

$f'''(a) = -24a^3 < 0$. எனவே, இங்குச் சிறுமப் பெருமங்கள் நிகழாது. இது ஒரு வளைவுமாற்றுப் புள்ளிதான்.

$x = -a$ என்று $f''(x)$-ல் பிரதியிட்டால்,

$f''(-a) = -16a^4 < 0$. ஆதலால் $x = -a$ ஒரு பெருமப்புள்ளி.

$x = -a/2$ என்று $f''(x)$-ல் பிரதியிட,

$f''(-a/2) = +\frac{29}{8}a^4 > 0$. ஆதலால் $x = -a/2$ ஒரு சிறுமப்புள்ளி.

$x = -a/3$ என்று $f''(x)$-ல் பிரதியிட,

$f''(-a/3) = \frac{-26a^4}{27} < 0$. எனவே, இதுவும் ஒரு பெருமப் புள்ளி.

அதாவது, குறிப்பிட்ட வளைகோட்டிற்கு ஒரு வளைவு மாற்றுப் புள்ளி, இருபெருமப்புள்ளிகள், ஒரு சிறுமப்புள்ளி உள்ளன.

பயிற்சி IV—1

கீழ்க்கண்ட சார்பலன்களுக்குச் சிறுமப்பெருமங்கள் உள்ளனவா என்று பார்த்து அவைகளைக் கணக்கிடு.

1. $x^3 - 6x^2 + 9x$

2. $-2x^3 - 3x^2 + 12x + 10$

3. $x^5 - 5x^4$

4. $2x - \frac{a^3}{x}$

5. $\frac{ax}{x^2 + a^2}$

6. $(2+x)^{1/3}(1-x)^{2/3}$

7. $x^4 - 6x^2 + 8x + 11$

8. $12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 6$

9. $(x^2 - 7x + 6) / (x - 10)$

10. $(x+1)(x+4) / (x-1)(x-4)$

11. $x \log x$

12. $9x^5 + 30x^4 + 35x^3 + 15x^2 + 1$

13. $x^3 - 3x^2 - 3x - 7$-க்கு $(-3, 3)$ என்ற இடைவெளியில் தனிப்பெரும்புள்ளிகளையும், சார்புச் சிறுமப் பெருமப் புள்ளிகளையும் கண்டுபிடித்து மதிப்புகளையும் கண்டுபிடி.

14. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 20$

15. $3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 17$

16. $5 - x - x^3$

17. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தில் ஒரு செவ்வகம் உள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது (inscribed). அதன் மீப்பெருமப் பரப்பு $2\,ab$ என்று காட்டு.

18. திறந்த ஒரு உருளையின் மேற் பரப்பளவு (surface area) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் கன அளவு (volume) பெருமமாயிருக்க வேண்டுமானால், அதன் உயரமும், அடி ஆரமும் சமம் என்று காட்டு.

19. ஒரு எண் அதன் வர்க்கமதிப்பைவிட அதிகமாயிருந்தால் அதனைக் கண்டுபிடி.

20. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r. அதனுள்ளே வரையப்படும் ஒரு இருசமபக்க முக்கோணத்தின் சிறுமச் சுற்றளவு (perimeter) என்ன?

21. $2y = x^2$ என்ற வளைகோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி (4,1) என்னும் புள்ளிக்கு மிக அருகில் உள்ளது. அது எது?

22. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ என்ற நீள்வட்டத்தில் அடித்தளம் x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு இருசம பக்க முக்கோணம், சுற்றி வரையப்பட்டுள்ளது (circumscribed). அதன் அடித்தளம், $3b$ என்றும், உயரம் $2a\sqrt{3}$ என்றும் காட்டு.

23. OAA' என்ற ஒரு பரவளையத்தின் துண்டில் (segment) வரையப்படும் செவ்வகத்தின் மிகப் பெரிய பரப்பு எது?

[துண்டின் அச்சு h நீளமுள்ளது என்க.]

24. ரேடியோ பெட்டி விற்கும் வியாபாரி வாரத்திற்கு x பெட்டிகளை ஒவ்வொன்றும் p ரூபாயிக்கு விற்கிறார். இங்கு $5x = 375 - 3p$. அவருக்குத் தயாரிக்கும் விலை x செட்டுகளுக்கு $(500 + 5x + \frac{1}{5}x^2)$ என்ற சார்பலனாகிறது. இலாபம் மிக அதிகமாகக் கிடைக்க வேண்டுமென்றால், அவர் வாரத்திற்குச் சுமார் 30 பெட்டிகளைச் செய்ய வேண்டும் எனக்காட்டு.

25. ஒரு உருக்கு உற்பத்திச் சாலை வாரத்திற்கு x டன்கள் கீழ்த்தர உருக்கும் (Low-grade steel) y-டன்கள் மேல்தர (high-grade) உருக்கும் தயாரிக்கிறது. இங்கு $y = \dfrac{40 - 5x}{10 - x}$. அங்காடியில் நிலையான விலைகள்--கீழ்த்தர உருக்கின் விலை, மேல்தர உருக்கின் விலையில் பாதி. பெருமமான வருவாய்க்கு வாரத்திற்கு எவ்வளவு டன்கள் கீழ்த்தர உருக்கு உற்பத்தி செய்ய வேண்டும்?

26. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ என்ற வளைகோடு எங்கெங்கு குவிவாக உள்ளது?

27. கீழ்க்கண்ட வளைகோடு துருவத்திற்குக் குவிவாக உள்ளதா அல்லது குழிவாக உள்ளதா என்று பார்.

$$r\cosh\theta = a.$$

28. $y = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 7$ எங்கெங்கு குவிவாக உள்ளது?

29. $y = \sin x$ என்ற வளைகோடு $(0, 2\pi)$ இடைவெளியில் எங்கெங்கு குவிவாக உள்ளது என்று ஆராய்க.

30. $y = ax^4$ என்ற வளைகோடு ஆதியில் மேற்புரக் குழிவாயிருக்க $a > 0$ என்றும், மேற்புரக் குவிவாயிருக்க $a < 0$ என்றும் இருக்க வேண்டுமென்று காட்டு.

31. கீழ்க்கண்டவைகளுக்குத் திசைமாற்றப் புள்ளிகளைக் கணக்கிடு:

(a) $y = 3x^2 - 2x^3$

(b) $y = x^3 - 9x^2 + 7x - 6.$

(c) $y = x^4 - 6x^2 + 8x - 1$

(d) $y = (x^2 - 1)^3 (x - 2)$

(e) $y = \dfrac{a^2 x}{a^2 + x^2}$

(f) $y = \dfrac{x^3}{a^2 + x^2}$

(g) $y = a \sin x + b \cos x$

(h) $y = a \cos^2 x + b \sin^2 x$

(i) $x = (\log y)^3$

(j) $y = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 7$

(k) $y = x^4$

(l) $y = x^{5/3}$

(m) $y = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 18$

(n) $y = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 17$

(o) $y = (x - a)(x - b)(x - c)$

(p) $a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$

(r) $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$

(s) $(y-2)^3 = (x-4)$

(t) $y = x^4 - 8x^2$

(u) $y = \dfrac{6x}{x^2+3}$

(v) $y = be^{-(x/a)^2}$

(w) $(4 - 2x + x^2)\,y = 2x - x^2$

(α) $y = x^2 \log (x^2/e^2)$

(β) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(γ) $x = 3y^4 - 4y^3 + 5$

(δ) $y = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$

(ε) $y^2 = x\,(x+1)^2$

(π) $y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}$

(φ) $xy = a^2 \log (y/a)$

(ψ) $y = \dfrac{x^3 - x}{3x^2+1}$

(θ) $x = a \tan t,\ y = a \sin t \cdot \cos t$

(x) $r^2\theta = a^2$

(y) $u = a\,(2\theta - \sin\theta),\ v = a\,(2 - \cos\theta)$

32. $ay^2 = x\,(x-a)\ (x-b)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு இரண்டே இரண்டு திசைமாற்றுப் புள்ளிகள் உள்ளன எனக் காட்டு.

33. $x = 2a\cot\theta,\ \ y = 2a\sin^2\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $x = 0,\ \ x = \pm\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ என்பவை திசைமாற்றுப்புள்ளிகள் என்று நிரூபி.

34. $(ay - x^2)^2 = bx^3$ என்ற வளைகோட்டின் திசைமாற்றுப் புள்ளி எது ?

35. $axy + a^3 = bx^3$ என்ற கோட்டிற்குத் திசைமாற்றுப் புள்ளி அந்த வளைகோடு x-அச்சைத் தொடும் இடத்தில் உள்ளது என்று காட்டு.

36. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குத் திசைமாற்றுப் புள்ளியில் தொடுகோடுகளைக் காண் :

(i) $(4 - 2x + x^2)\, y = 2x - x^2$

(ii) $x = 3y^4 - 4y^3 + 5$

(iii) $y^2 = x\,(x + 1)^2$

37. $y = k\,(x^2 - 3)^2$ என்ற வளைகோட்டின் திசைமாற்றுப் புள்ளிகளிலுள்ள செங்கோடு, ஆதியினூடே செல்கிறதென்றால் $k = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ என்றிருக்கவேண்டும் என்று காட்டு.

38. $x^3 + y^3 = ax^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $x = a$ ஒரு ஒரு திசைமாற்றுப்புள்ளி எனக்காட்டு.

39. $y^2 = f\,(x)$ என்பது ஒரு வளைகோடானால், அதன் திசை மாற்றுப்புள்ளிகள் $[f'\ (x)]^2 = 2f\ (x) \cdot f'\ (x)$ என்ற சமன் பாட்டுக்குப் பொருந்தியிருக்கும் என்று நிரூபி.

40. $y = ax^4 + bx^2y^2 + cy$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஒரு அலைபாய்வுப்புள்ளி உள்ளது எனக்காட்டு.

41. போலார் முறையில் $2x\ (x^2 + y^2, = a\ (2x^2 + y^2)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $\theta = \pm \sin^{-1}\sqrt{2/5}$ என்பது திசை மாற்றுப்புள்ளி என்று காட்டு.

42. $y^2\,(x - a) = x^2\,(x + a)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு இரு திசை மாற்றுப்புள்ளிகள் உள்ளன. அவைகளைச் சேர்க்கும் கோடு ஆதியில் $\pi/3$ அளவுள்ள கோணத்தை எதிர்கொள்ளும் (subtend) என்று நிரூபி.

43. $54y = (x + 5)^2\,(x^3 - 10)$ என்பதற்கு எங்கு திசை மாற்றுப் புள்ளிகள் உள்ளன ?

44. $y = x \log x$ எங்கெங்கும் மேற்புறம் குழிவாகவும், $y = \log x$ என்பது எங்கெங்கும் குவிவாகவும் உள்ளது என்று காட்டு.

45. $y = x^2\ (1 - x^2)$ என்பதற்கு $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$-ல் திசை மாற்றுப் புள்ளிகள் உள்ளன என்று காட்டு.

46. $y = (1 - x) / 1 + x^2$ - ன் திசைமாற்றுப் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டின் மேலுள்ளன என்று காட்டு.

47. $y = A x^3 + B x^2 + C x$ என்பது (1, 13) புள்ளியினூடே செல்கிறது; $x = 1/2$ — ல் திசைமாற்றுப் புள்ளி உள்ளது என்றால், A, B, C,க்களின் மதிப்பு என்ன?

விடைகள்

1. $x = 1$ பெருமம் ; $x = 3$ சிறுமம்
2. $x = 1$ பெருமம் · $x = -2$ சிறுமம்.
3. $x = 0$ பெருமம்; சிறுமம் $x = 4$.
4. சிறுமம் $x = a$
5. $x = a$ பெருமம்; $x = -a$ சிறுமம்.
6. $x = 1$ சிறுமம் ; $x = -1$ பெருமம்.
7. $x = -2$ சிறுமம்; $x = 1$, வளைவு மாற்றுப் புள்ளி.
8. $x = 1$ பெருமம்; சிறுமம் $x = 2$-ல், $x = 0$ வில் ; $x = 0$ வளைவு மாற்றுப் புள்ளி.
9. சிறுமம் $x = 16$, பெருமம் $x = 4$.
10. மெரும மதிப்பு $= -9$; சிறுமதிப்பு $= -1/9$
11. சிறுமமதிப்பு $= -e^{-1}$.
12. $x = -2/3$ பெருமம்; $x = 0$ சிறுமம்.

13. தனிப்பெருமம் $x = (1 - \sqrt{2})$; சார்புச் சிறுமம் $x = (1 + \sqrt{2})$-ல் சிறுமமதிப்பு $= -12 - 4\sqrt{2}$; பெருமமதிப்பு $= -12 + 4\sqrt{2}$

14. $x = -5$, பெருமம்; $x = 1$ சிறுமம்; $x = -2$ வளைவு மாற்றம்.

15. பெருமம் ; $x = 1$-ல் ; சிறுமங்கள் $x = \pm 2$; வளைவு மாற்றங்கள் $x = \frac{1}{3}(-1 \pm \sqrt{3})$-ல்.

16. சிறுமப் பெருமங்களே கிடையாது.

19. 1/2.

20. $6r\sqrt{3}$.

21. 2, 2

23. அகலம் 2/3 h.

25. சுமார் $5\frac{1}{3}$ டன்.

26. $x = 2$-க்கு இடப்புறம் குவிவாகவும், $x = 2$-க்கு வலப் புறம் குழிவாகவும் உள்ளது.

27. குழிவாக.

28. $x = 3$-க்கு வலப்புறமும், $x = -2$-க்கு இடப்புறமும் குழிவாகவும் ; $(-2, 3)$ இடைவெளியில் குவிவாகவும் உள்ளது.

29. குவிவாக $(0, \pi)$-ல் ; $(\pi, 2\pi)$-ல் குழிவாக.

31. (a) $x = 1/2$ (b) $x = 3$;

(c) $x = \pm 1$; (d) சுமாராக $x = -1/2$

(e) $x = 0, \pm\sqrt{3}\cdot a$; (f) $x = 0$;

(g) $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(a/b)$, n ஒரு மிகைஎண்;

(h) $x = n\pi \pm \pi/4$; (i) $y = 1, y = e^3$;

(j) $x = -2, x = 3$. (k) கிடையாது;

(l) $x = 0$; இரண்டாம் வகை எண், ஆதியில் இல்லாமல் போனாலும், ஆதிக்குமுன் அது குறையாகவும், ஆதிக்குப் பிறகு மிகையாகவும் உள்ளதால், ஆதி திசைமாற்றுப்புள்ளியாகிறது;

(m) $x = 5/2$; (n) $x = 1/3\,(-1 \pm \sqrt{13})$;

(o) $x = 1/3\,(a+b+c)$; (p) $(0, 0)$;

(r) $x = 0, x = 2/3$; (s) $x = 4$;

(t) $x = \pm 2/\sqrt{3}$; (u) $x = 0, x = \pm 3$;

(v) $\pm a/\sqrt{2}$; (w) $x = 0, x = 2$;

(α) $x = 1$; (β) $x = \frac{-b}{3a}$; (γ) $y = 0, \quad y = 2/3$;

(δ) $x = -2, 1 \pm \sqrt{3}$ (ε) $x = 1/3$; (π) $x = \pm \sigma$; (φ) $y = ae^{2/3}$;

(ψ) $x = 0$; (θ) $x = \pm \sqrt{3}a$;

(x) $(a\sqrt{2}, 1/2)$; (y) $\theta = \pi/3$.

34. $x = 9b/64$

36. (i) $x - 2y = 0$; $x + 2y - 2 = 0$.

(ii) $x = 5, 9x + 6y = 15\frac{1}{3}$

(iii) $9x + 1 = \pm 3\sqrt{3}\cdot y$

43. $x = -2, \quad x = -4 \pm \sqrt{18}$.

§ 4·7 உட்படு சார்பலன்கள் (Implicit functioms)

$F(x, y) = 0$ — (i) என்பது ஒரு உட்படு சார்பலனுனல் y-ன் சிறும, பெரும மதிப்புக்களைக் கணக்கிடுவதற்கான வழிமுறைகளை இப்பொழுது காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட சார்பலனை நேரே வகையிட,

$$F_x + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

y-ன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக வேண்டும். எனவே, $F_x = 0$ என்று கிடைக்கிறது. ஆக, நிலைப் புள்ளிகளுக்கு $F(x, y) = 0$, மற்றும் $F_x = 0$.

(ii) மறுபடியும் x-ஆல் வகையிட,

$$F_{xx} + F_{xy} \frac{dy}{ax} + F_y \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left[F_{xy} + F_{yy} \cdot \frac{dy}{dx}\right] = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\text{-ம் பூஜ்ஜியமாதலால், } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}}{F_y} \qquad \text{... (iii)}$$

இங்கு கிடைத்த மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு, பெருமமா, சிறுமமா என்பதனை ஆராயலாம்.

குறிப்பு : பல சமன்பாடுகளில் F_x, F_y, F_{xx} எல்லாம் குறித்த புள்ளிகளில் பூஜ்ஜியமாகிவிடும்.

அதாவது, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ இரண்டும் தேராக்கணியங்கள் (Indeterminate quantities) ஆகிவிடும். பொதுவாக, அத்தகைய நிலைகளில், மீண்டும் வகையிடுதலால் இவைகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடமுடியும்.

எ. கா. 13 :

$xy(y-x) = 2a^3$ என்ற சார்பலனில், y-ன் மீப்பெரும அல்லது மீச்சிறும மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

$F(x, y) = xy(y-x) - 2a^3 = xy^2 - x^2y - 2a^3 = 0$ — (i) என்போம்.

இங்கு $F_x = y^2 - 2xy$

$F_y = 2xy - y^2$

$F_{xx} = -2y$ என்று எளிதில் கிடைக்கிறது. $\frac{dy}{dx} = 0$ என்றால்

ஒருங்கே $F(x, y) = 0$, மற்றும் $F_x = 0$ ஆக வேண்டும்.

$F_x = 0$ என்றால் $y = 0$ அல்லது $y = 2x$ · முதல் மதிப்பை $F(x, y)$-ல் பொருத்த $F \neq 0$ என்று வருகிறது, எனவே, இது தேவையற்ற மதிப்பு.

$y = 2x$ என்று பிரதியிட $F(x, y) = 4x^3 - 2x^3 - 2a^3 = 0$ அதாவது $x = a$, $y = 2a$ என்று கிடைக்கிறது.

எனவே, இந்தப் புள்ளியில்தான் சிறுமமோ, பெருமமோ, இருக்க வேண்டும்.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}}{F_y} = +\frac{2y}{2xy - x^2} \text{ ; இங்கு } x = a, \; y = 2a$$

என்று பிரதியிட, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3a} > 0$ ஆகிறது.

எனவே $x = a$ என்பது மீச்சிறுமப் புள்ளி. y-ன் மீச்சிறும மதிப்பு $= 2a$.

எ. கா. 14 :

$x^3 + y^3 - 3xy = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு மீச்சிறும, மீப்பெரும நிலைத்தூரங்களை, (ordinates) கணக்கிடு.

$F = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ — (i)

$F_x = 3(x^2 - y) = 0$ என்றால், $x^2 = y$.

இதனை (i)-ல் பிரதியிட

$F = x^3 + x^6 - 3x^3 = 0$. ஆனால், $x = 0$ அல்லது $x = 2^{\frac{1}{3}}$

அப்பொழுது $(0, 0)$, மற்றும் $(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}})$ என்ற இரு புள்ளிகளைத்தான் நாம் ஆராயவேண்டும்.

$F_y = 3(y^2 - x)$

$F_{xx} = 6x^2$

எனவே, $(0, 0)$ என்ற புள்ளியில் $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ அல்லது தேராக் கணியம்.

அதே போலவே, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-F_{xx}}{F_y} = \frac{0}{0}$-ம் கூட,

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ களைக் கணக்கிட, கொடுத்த சமன்பாட்டை x-ஆல் மூன்று முறை வகையிடுவோம்.

$$F = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 3x \cdot \frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ அல்லது}$$

$$(x^2 - y) + (y^2 - x) \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

மறுபடியும் வகையிட

$$2x - \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(2y \cdot \frac{dy}{dx} - 1\right) + (y^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

இங்கு, $x = 0$, $y = 0$ என்று பிரதியிட

$-\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0$ அல்லது $\frac{dy}{dx} = 0$ என்று கிடைக்கிறது.

எனவே $(0, 0)$ புள்ளியில் $\frac{dy}{dx} = 0$.

மறுபடியும் (iii)-ஐ வகையிட

$$2 - \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left[2y\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$+ \left(2y\cdot\frac{dy}{dx} - 1\right)\frac{d^2y}{dx^2} + (y^2 - x)\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$+ \frac{d^2y}{dx^2}\left[2y\cdot\frac{dy}{dx} - 1\right] = 0 \qquad \textbf{(iv)}$$

இங்கு $x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0$ என்று பிரதியிட

$2 + \frac{d^2y}{dx^2}(-1) = 0$ அல்லது $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$ என்று வரும்.

அதாவது (0, 0) தான் மீச்சிறுமப்புள்ளி.

y-ன் மீச்சிறுமதிப்பு $= 0$.

மற்ற புள்ளியைக் கவனிப்போம்; அது $(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}})$ என்பது.

எனவே, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-F_{xx}}{F_y} = \frac{-6x}{3(y^2 - x)}$;

$x = 2^{\frac{1}{3}}, \quad y = 2^{\frac{2}{3}}$ என்று பிரதியிட,

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0.$ எனவே, $x = 2^{\frac{1}{3}}$ என்பது பெருமப்புள்ளி.

y-ன் மீப்பெருமதிப்பு $= 2^{\frac{2}{3}}$.

§ 4·8. இரண்டு மாறிகள் உள்ள சார்பலனின் மீப்பெருமம், சிறுமங்கள் :

இப்பொழுது y-ன் பெருமம், சிறுமங்களைக் கணக்கிடாமல், (x, y) என்பது ஒரு சார்பலனுனால், ϕ-ன் சிறுமப் பெருமங்களை

ஆராய்வோம். முதற்கண் அவைகளை வரையறுத்து நிறுவ வேண்டும்.

(a, b) என்பது ϕ-ன் அரங்கத்தில் (Domain) ஒரு உட்புறப் புள்ளி (Inner point). அதில், ϕ-ன் மதிப்பு $= \phi\ (a, b)$. இப்பொழுது $\{\phi(x, y) - \phi(a, b)\}$-ன் மதிப்பு அந்தப் புள்ளியின் அருகாமையில் (Neighbourhood) $(a+h, b+k)$ போன்றதில் குறை எண்ணகை இருப்பின் அந்த மதிப்பை பெருமம் என்று கூறுவோம்.

$\{\phi(x, y) - \phi\ (a, b)\}$-ன் மதிப்பு மிகை எண்ணகை இருந்தால், $\phi\ (a, b)$ என்பது $\phi\ (x, y$-ன்) சிறுமதிப்பாகும்.

மேல் இரண்டு நிலைகளிலும் பொதுவாக $\phi\ (x, y)$-ன் மதிப்புகளை முனை மதிப்புகள் (Extreme values) என்போம்.

§ **4·8·1. தேற்றம் :** $\phi\ (a, b)$ ஒரு முனை மதிப்பாக வேண்டுமானால் அந்தப் புள்ளியில் $\phi x = \phi y = 0$ என்பவைகள் வேண்டிய நிபந்தனைகள் (Necessary Conditions). அத்தகைய புள்ளியை நிலைப்புள்ளி என்று கூறுவோம்.

$\phi\ (a, b)$ என்பது முனை மதிப்பானால், ஏதாவதொரு மாறிக்கும் அது முனை மதிப்பாகத்தானே இருக்கவேண்டும் ? அதாவது $\phi x\ (a, b) = 0$; அது போலவே, $\phi y\ (a, b) = 0$ என்ற முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

எனவே, $\phi x = \phi y = 0$ என்ற நிபந்தனைகள் தேவையானவையே. ஆனால் அவை போதுமானவை (sufficient) அல்ல என்பதனைக் காட்ட ஒரு சிறு எடுத்துக்காட்டே போதும்.

$f(x, y)$ என்ற சார்பலனைக் கீழ்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.
$x = 0,\ y = 0$ என்றால் $f(x, y) = 0$
மற்ற எல்லா நிலைகளிலும் $f(x, y) = 1$

இங்கு ஆதியில் $f_x = 0,\ f_y = 0$ என்று வருகிறது. ஆனால், அது முனைப்புள்ளியல்ல.

§ **4·8·2. தேற்றம் :**

$\phi\ (x, y)$ என்பது ஒரு சார்பலன்; $x = a, y = b$ என்ற புள்ளியில் $\phi_x = 0 = \phi_y$ மற்றும் $\phi_{xx} = A, \phi_{xy} = B, \phi_{yy} = C$ என்றால்,

(i) $A < 0$, மற்றும் $AC - B^2 > 0$ ஆனுல், $\phi(a, b)$ ஒரு பெருமமதிப்பு.

(ii) $A > 0$, மற்றும் $AC - B^2 > 0$ ஆனுல், $\phi(a, b)$ ஒரு சிறுமமதிப்பு.

(iii) $AC - B^2 < 0$ ஆனுல், $\phi(a, b)$ முனைமதிப்பு அல்ல.

(iv) $AC - B^2 = 0$ என்ருல், மேலும் ஆராய வேண்டிய நிலையாகும்.

குறிப்பு : $\phi(x, y)$ என்ற சார்பலனுக்கு (a, b)-ன் அருகாமையில் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் (Partial derivatives) உள்ளன என்றும் தொடர்ச்சியானவை (continuous) என்றும் கொள்வோம். மற்றும் அவைகள் எல்லாம் ஒருங்கே பூச்சியமாவதில்லை என்றும் கொள்வோம்.

மற்றும் $\phi_{xx} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = r$; $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \phi_{xy} = S$; $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \phi_{yy} = t$ என்போம்.

அப்பொழுது $\phi(a + h, b + k)$-ஐ டெய்லரின் தேற்றத்தைக் கொண்டு விரிவாக்க

$$\phi(a + h, b + k) = \phi(a, b) + [h \cdot \phi_x + k\,\phi_y]$$

$$+ \frac{1}{2!}[h^2r + 2hks + k^2t] + R \ldots\ldots\ldots$$

இங்கு R-ல் மூன்ரும் அல்லது அதற்கும் அதிகப்படித்தான வகைக்கெழுக்களும், h^3, k^3 போன்றவைகளுமே இருக்கும். h, k-களை மிகச்சிறிய மதிப்புகளாக எடுத்தோமானுல் $R \to 0$ என்று கொள்ளலாம்.

முனைமதிப்பில் $\phi_x = \phi_y = 0$ எனவே

$$\phi(a + h, b + k) - \phi(a, b) = \tfrac{1}{2}[rh^2 + 2shk + tk^2]$$

இடதுபுறக்கோவை மிகை எண்ணுயிருக்க, $rh^2 + 2shk + tk^2 > 0$ என்ருக வேண்டும். எனவே, முனைமதிப்புகளுக்கு

இந்த இருபடி அமைப்பு (Quadratic form) மிகையாக வேண்டும். அதற்கான விதிகள் $r > 0$, $rt - s^2 > 0$ என்பது [கீழே காண்க].

அந்த மதிப்புக் குறையாக வேண்டுமானால், $r < 0$, $rt - s^2 > 0$ எனவே, பெருமமதிப்பிற்கு : $r < 0$, $rt - s^2 > 0$.

அதாவது $\phi_{xx} < 0$; மற்றும் $\phi_{xx} \cdot \phi_{yy} - (\phi_{xy})^2 > 0$ (60)

சிறுமமதிப்பிற்கு

$$\phi_{xx} > 0, \text{ மற்றும் } \phi_{xx} \cdot \phi_{yy} - (\phi_{xy})^2 > 0 \qquad (61)$$

$\phi_{xx} \cdot \phi_{yy} - (\phi_{xy})^2 = 0$ ஆனுல் இருபடி அமைப்பின் குறி சிலசமயம் மிகையாகவும், சிலசமயம் குறையாகவும் இருக்குமாதலால், சிறுமப்பெருமங்கள் நிகழமுடியாது.

$\phi_{xx} \phi_{yy} - (\phi_{xy})^2 = 0$ எனில், $\{\phi(a+h, b+k) - \phi(a, b)\}$-ன் மதிப்பின் குறி என்னவென்று அறிய முடியாது. எனவே, மேலும் ஆராய வேண்டும்; அதே போலவேதான் $\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{xy} = 0$ என்ற நிலையும்.

எனவே $\phi(x, y)$-ன் சிறுமப்பெரும மதிப்புகளைக் கணக்கிட கீழ்க்காணும் முறைகளைக் கையாளலாம் :—

முதலில் $\phi = 0 = \phi_x = \phi_y$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கொண்டு, x, y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி. அத்தகைய ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ϕ_{xx}, ϕ_{yy}, ϕ_{xy}-களைக் கண்டுபிடித்து $\phi_{xx} \phi_{yy} - (\phi_{xy})^2$-ஐக் கணக்கிடு.

(i) இது பூஜ்யமானுல் மேலும் ஆராய வேண்டிய நிலை.

(ii) இது > 0 ஆனுல், $\phi_{xx} < 0$ என்ற புள்ளிகளில் பெருமதிப்பும், $\phi_{xx} > 0$ என்ற புள்ளிகளில் சிறுமமதிப்புகளும் உள்ளன.

(iii) இது < 0 என்ருல் அந்தப்புள்ளிகளில் சிறுமப்பெரும மதிப்புகள் இருக்கமுடியாது.

குறிப்பு : இருபடி அமைப்புகளைப்பற்றிச் சிறிது கூறுவோம். $Q = AX^2 + 2HXY + BY^2$ என்ற கோவையை X, Y-மாறிகளில் இருபடி அமைப்பு என்கிருேம் (Quadratic Form in the two variables X and Y). $Q = \frac{1}{A}[(AX + HY)^2 + (AB - H^2)Y^2]$ என்று எழுதுவோம். இப்பொழுது $AB - H^2 > 0$ எனில் Q-ன்

குறியும், A-ன் குறியும் ஒன்ருக இருக்கும் என்பது தெளிவு. எனவே, $A > 0$ ஆனுல், Q எப்பொழுதும் மிகையாகவே இருக்கும். அத்தகைய அமைப்பினை "வரையறுத்த மிகை அமைப்பு" (Positive Definite Form) என்போம். அதாவது, X, Y-களின் எந்தெந்த மதிப்புகளுக்கும் $Q > 0$ என்றே இருக்கும்.

அது போலவே, $A < 0$ ஆனுல், எப்பொழுதும் $Q < 0$ ஆக இருக்கும். அது போது — Q-ஐ "வரையறுத்த குறை அமைப்பு" (Negative Definite Form) என்போம். அப்பொழுது, Q-என்பது X, Y-ன் மதிப்புகளுக்கெல்லாம் குறை (Negative) யாகவே இருக்கும். இப்பொழுது $AB - H^2 = 0$ என்போம். Q-ன் குறியும், A-ன் குறியும் ஒன்ருக இருக்கும். எனவே, $A > 0$ ஆனுல் $Q > 0$; $A < 0$ ஆனுல், $Q < 0$.

$AB - H^2 < 0$ எனில், Q-ன் குறியைப்பற்றி அறுதியாகக் கூறமுடியாது. சில X, Y-மதிப்புகளுகளுக்கு மிகையாகவும், வேறு சில மதிப்புகளுக்குக் குறையாகவும் இருக்கலாம். எனவே, அத்தகைய வேளைகளில் சிறுமப் பெருமங்கள் நிகழமுடியாது.

எ. கா. 15 :

$u = x^2 y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$ என்பதன் சிறுமப் பெருமங்களைக் கண்டுபிடி. [M. Sc. 67.]

$$\left.\begin{aligned} u_x &= 2xy^2 - 10x - 8y = 0 \\ u_y &= 2x^2y - 8x - 10y = 0 \end{aligned}\right\} \text{ என்ருல் } x = 0.\ y = 0$$

என்று வரும், இந்த மதிப்புகளை u-ல் பிரதியிட $u = 0$ என்று வருகிறது. எனவே, இந்த ஒரு புள்ளியைத் தான் ஆராய வேண்டும்.

$u_{xx} = 2y^2 - 10$; $u_{xy} = 4xy - 8$; $u_{yy} = 2x^2 - 10$. எனவே, குறித்த $x = 0$, $y = 0$ புள்ளியில் $u_{xx} \cdot u_{yy} - (u_{xy})^2 = 0$. எனவே, இது முடிவுருத நிலை.

ஆனுல், $u_{xx} = -10 < 0$ என்று கிடைப்பதால், அது பெரும மதிப்பு தான். எனவே, u-ன் பெருமமதிப்பு $x = 0 \cdot y = 0$ ஆகும் போது மதிப்பு 0.

எ. கா. 16 :

$\phi = x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy$-ன் சிறுமப் பெருமங்களைக் கணக்கிடுக.

$$\phi_x = 3x^2 - 63 + 12y = 0$$

$\phi_y = 3y^2 - 63 + 12x = 0$ என்று எடுத்துக் கொண்டு x, y-ன் மதிப்புகளைத் தீர்க்கலாம்.

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து $12y = 63 - 3x^2$ அல்லது $y = \frac{1}{4}(21 - x^2)$

இதனை இரண்டாவதில் பிரதியிட,

$$\frac{3}{16}(21 - x^2)^2 - 63 + 12x = 0,$$

அதாவது $x^4 - 42x^2 + 64x + 105 = 0$. இதற்கு $x = -1$ என்ற மூலம் எளிதில் கிடைக்கிறது.

$(x + 1)$-ஆல் இடது பக்கக் கோவையை வகுக்க,

$x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0$ என்று வருகிறது.
$x = 3$ என்பது மற்றொரு மூலம், $(x - 3)$-ஆல் வகுக்க. $x^2 + 2x - 35 = 0$. அதாவது $x = 5$, $x = -7$ என்பவை மற்ற மூலங்கள்.

எனவே, இந்த நான்கு புள்ளிகளை ஆராய வேண்டும். இவைகளுக்குத் தகுந்த மதிப்புகளை முதலில் கணக்கிடுவோம்.

$x = -1$ எனில், $y = \frac{1}{4}(21 - 1) = 5$

$x = 3$ எனில், $y = \frac{1}{4}(21 - 9) = 3$

$x = 5$ எனில், $y = \frac{1}{4}(21 - 25) = -1$

$x = -7$ எனில், $y = \frac{1}{4}(21 - 49) = -7$

எனவே, $(-1, 5)$, $(3,3)$, $(5, -1)$, $(-7, -7)$ என்பவை நான்கு புள்ளிகள்.

இப்பொழுது, ϕ_{xx}, ϕ_{xy}, ϕ_{yy}-களை இந்தப் புள்ளிகளில் கணக்கிடுவோம்.

$$\phi_{xx} = 6x\ ;\ \phi_{xy} = 12;\ \phi_{yy} = 6y.$$

$\therefore\ \phi_{xx} \cdot \phi_{yy} - (\phi_{xy})^2 = 36xy - 12$ என்று வருகிறது. $(-1,5)$-ல் இதன் மதிப்பு < 0, எனவே இது சிறுமமும் அல்ல, பெருமமும் அல்ல.

$(3,3)$-ல் இதன் மதிப்பு > 0. மற்றும் $\phi_{xx} = 18 > 0$. ஆதலால், இது சிறுமமதிப்பைத் தரும்.

சிறுமமதிப்பு $u = -216$.

$(5, -1)$-ல் இதன் மதிப்பு < 0. எனவே, இங்கும் சிறுமப் பெருமங்கள் கிடையாது.

$(-7, -7)$-ல் இதன் மதிப்பு > 0. மற்றும் $\phi_{xx} < 0$ எனவே, இது ஒரு பெரும் மதிப்பைத் தரும்.

பெருமதிப்பு : $u = -243 - 243 + 882 + 588$
$= 984$

§ 4·9 பலமாறிகளுக்கான சிறுமப்பெருமங்கள் :

$\phi\,(x_1,\ x_2 \ldots\ldots x_n)$ என்பது ஒரு பல-மாறி சார்பலன். $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி. $\phi\,(a_1, a_2 \ldots\ldots a_n)$ என்பது முனைமதிப்பாக (Extreme Value) இருக்கவேண்டு மென்றால், $\{\phi\,(x_1,\ x_2 \ldots\ldots x_n) - \phi\,(a_1, a_2 \ldots\ldots a_n)\}$-ன் மதிப்பு, கொடுத்த புள்ளியின் அருகாமையில் ஒரே குறியுள்ளதாக இருக்க வேண்டும் என்று வரையறுக்கலாம். குறி மிகையானல் சார் பலனுக்குச் சிறுமமதிப்பும், குறி குறையானல் சார்பலனுக்குப் பெருமமதிப்பு இருக்கும் என்றும் வரையறுக்கலாம்.

முன்போலவே (§ 4·8), பெருமச் சிறும மதிப்புகளுக்கு வேண்டிய நிபந்தனைகள் $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial \cdot \phi}{\partial x_2}$ ...... $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_n}$ எல்லாமே பூச்சியமாயிருக்க வேண்டும்.

எனவே, எந்தப் புள்ளியில் ஒரு படி பகுதிவகைக் கெழுக்கள் எல்லாம் பூச்சியமாயிருக்கின்றனவோ, அதனை நிலையான புள்ளி என்போம். அது முனைப்புள்ளியாகவும் இருக்காலம் ; இல்லா மலும் இருக்கலாம்.

வகையிட,

$$d\phi = \phi_{x_1} \cdot d_{x_1} + \phi_{x_2} \cdot d_{x_2} + \cdots\cdots + \phi_{x_n} \cdot d_{x_n}$$

மறுபடியும் வகையிட ... (i)

$$d^2\phi = \phi_{x_1 x_1} (d_{x_1})^2 + \cdots\cdots + \phi_{x_n \cdot x_n} (d_{x_n})^2 + 2 \Sigma \phi_{x_i x_j} (d_{x_i}) (d_{x_j}) \quad \ldots \text{(ii)}$$

இங்கு கெழுக்களின் மதிப்புகள் எல்லாம் $(a_1, a_2 \ldots\ldots a_n)$ என்ற புள்ளியில் கணக்கிடப்பட வேண்டியவை.

(ii)-என்பது n-மாறிகளுள்ள இருபடி அமைப்பாகும் இதற்கு மிகைக்குறி மாத்திரம் இருக்க வேண்டும் என்றால்.

$$\phi_{x_1 x_1}, \qquad \begin{vmatrix} \phi_{x_1 x_1} & \phi_{x_1 x_2} \\ \phi_{x_1 x_2} & \phi_{x_2 x_2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \phi_{x_1 x_1} & \phi_{x_1 x_2} & \phi_{x_1 x_3} \\ \phi_{x_1 x_2} & \phi_{x_2 x_2} & \phi_{x_2 x_3} \\ \phi_{x_1 x_3} & \phi_{x_2 x_3} & \phi_{x_3 x_3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \phi_{x_1 x_1} & \phi_{x_1 x_2} & \cdots\cdots & \phi_{x_1 x_n} \\ \phi_{x_2 x_1} & \phi_{x_2 x_2} & \cdots\cdots & \phi_{x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{x_n x_1} & \phi_{x_n x_2} & \cdots\cdots & \phi_{x_n x_n} \end{vmatrix} \qquad (62)$$

என்கிற எல்லா அணிக்கோவை (determinants)களும் மிகையாக வே இருக்கவேண்டும். [இந்த முடிவு இயற்கணிதத்தினின்றும் பெறப்பட்டது. அணிகளின் (matrix) பண்புகளினின்றும் இதனை நிறுவலாம்].

எனவே (62)-லுள்ள அணிக்கோவைகள் மிகையாக இருப்பின், அந்தப் புள்ளியில் சிறுமமதிப்பு இருக்கும்.

இவைகள் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று (alternately) மிகையாகவும், குறையாகவும் மாறிவந்தால் இருபடி அமைப்பின் குறி குறையாக இருக்கும். எனவே, அந்த நிலையில், சார்பலனின் மதிப்பு பெரும மதிப்பாகும். இந்த இரண்டு நிபந்தனைகளும் பொருந்தாவிட்டால் அந்தப் புள்ளிகளில் சிறுமப்பெருமங்கள் இருக்கமுடியாது.

முடிவாக, ϕ என்பது ஒரு n-மாறிகளின் சார்பலனானல். $\phi_{x_1} = 0 = \phi_{x_2} = \ldots\ldots = \phi_{x_n}$ என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க வேண்டும். $x_1 = a_1, x_2 = a_2 \ldots\ldots x_n = a_n$ என்பது ஒரு மூலம் என்க. அப்பொழுது, இந்த மதிப்புகளை வைத்து $\phi_{x_{ij}}$ மற்றும் $\phi_{x_i x_j}$

$[i = 1, 2 \ldots\ldots n;\; j = 1, 2 \ldots\ldots n]$ என்பவைகளைக் கணக்கிடு. பிறகு (62)-ல் உள்ள அணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

மதிப்புகள் எல்லாம் மிகையானல், புள்ளியில் சிறுமம் நிகழும்; மதிப்புகள் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று மிகை, குறையானல், புள்ளியில் பெருமமதிப்பு இருக்கும்.

இவ்விரண்டும் இல்லையென்றல், அங்கு சிறுமமும் நிகழாது பெருமமும் நிகழாது.

எ. கா. 17.

$\phi = 2xyz + x^2 + y^2 + z^2$ என்ற கோவையின் சிறுமப் பெருமங்கள் என்ன ?

$\phi_x = 2yz + 2x;\; \phi_y = 2xz + 2y;\; \phi_z = 2xy + 2z$ எனவே, $\phi_x = \phi_y = \phi_z = 0$ என்றல் $x + yz = 0;\; y + zx = 0,\; z + xy = 0$ என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. மூன்றையும் தீர்த்தால்,

$x = y = z = 0$ என்ற ஒரே மூலம் தான் வருகிறது.

மறுபடியும் வகையிட,

$\phi_{xx} = 2;\; \phi_{xy} = 2z;\; \phi_{xz} = 2y.$

$\phi_{yy} = 2;\; \phi_{yz} = 2x;\; \phi_{zz} = 2.$

இவைகளின் மதிப்புகளை (0, 0, 0)ல் கணக்கிட,

$\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = 2$; $\phi_{xy} = \phi_{xz} = \phi_{yz} = 0$ என்ற முடிவுகள் வருகின்றன.

இப்பொழுது (62)-ல் அணிக்கோவைகளைக் கணக்கிடுவோம்.

$$\phi_{xx} = 2 > 0; \quad \begin{vmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\begin{vmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

எனவே (0, 0, 0) என்பது சிறுமப் புள்ளி.

எ. கா. 18.

$(ax + by + cz)$ $Exp.$ $(-\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2)$-ன் பெரும மதிப்பென்ன?

$$\phi = (ax + by + cz) \cdot Exp \cdot (-\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2)$$

$$\phi x = (ax + by + cz) \cdot Exp\ (-\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2)$$
$$(-2\alpha^2 x)$$
$$+ Exp\ (-\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2)\ a.$$
$$= Exp. (-\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 . z^2)$$
$$\times [-2\alpha^2 x\ (ax + by + cz) + a].$$

$\phi_1 = 0$ என்றால் $-2\alpha^2 x\ (ax + by + cz) + a = 0$

அதுபோலவே $\phi_y = 0$ எனில்,

$$-2\beta^2 y\ (ax + by + cz) + b = 0 \qquad (i)$$

$\phi_z = 0$ எனில், $-2\gamma^2 z\ (ax + by + cz) + c = 0$

$ax + by + cz = k$ என்றால்,

அதாவது $\frac{a}{2\alpha^2 x} = \frac{b}{2\beta^2 y} = \frac{c}{2\gamma^2 z} = k$

$x = \frac{a}{2\alpha^2 k}$; $y = \frac{b}{2\beta^2 k}$; $z = \frac{c}{2\gamma^2 k}$

மற்றும் $ax + by + cz$

$$= \frac{a^2}{2\alpha^2 k} + \frac{b^2}{2\beta^2 k} + \frac{c^2}{2\gamma^2 k} = k.$$

எனவே, $\frac{1}{2k}\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right) = k$ அல்லது

$$2k^2 = \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}.$$

இப்பொழுது, ϕ_{xx} முதலியவைகளைக் கணக்கிடவேண்டும். மற்றும், $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = 1/2$.

$$\phi_{xx} = Exp\cdot(\quad)\cdot[-2\alpha^2 x\cdot a + (ax + by + cz)(-2\alpha^2)]$$
$$+ [a - 2\alpha^2 x(ax + by + cz)]\, Exp\cdot(\quad)(-2\alpha^2 x)$$

(i) நிபந்தனையின்படி, இரண்டாம் கோவை பூச்சியமாகி விடும்.

எனவே, $\phi_{xx} = Exp\cdot(-1/2)(-2\alpha^2)\left(\frac{2\alpha^2 k^2 + a^2}{2\alpha^2 k}\right)$

< 0 என்றாகிறது.

இதுபோலவே $\phi_{yy} = Exp\cdot(-1/2)(-2\beta^2)\cdot\left(\frac{2\beta^2 k^2 + b^2}{2\beta^2 k}\right)$

< 0 என்றாகும்.

$\phi_{zz} = Exp\cdot(-1/2)(-2\gamma^2)\left(\frac{2\gamma^2 k^2 + c^2}{2\gamma^2 k}\right)$

< 0 என்றாகும்.

$$\phi_{xy} = Exp\cdot(\quad)\cdot(-2\alpha^2 x\cdot b) + (-2\alpha^2 x(ax+by+cz)]$$
$$\times [Exp(\quad)(-2\beta^2 y)].$$

குறித்த புள்ளியில், இரண்டாம் கோவை பூச்சியமானதால்

$$\phi_{xy} = Exp\cdot(-1/2)\cdot\left(\frac{-ab}{k}\right)$$

இதேபோல் $\phi_{xz} = Exp\cdot(-1/2)\left(\frac{-ac}{k}\right)$

$\phi_{yz} = Exp\cdot(-1/2)\left(\frac{-bc}{k}\right)$ என்று வரும்.

எனவே (62)-ன் அணிக் கோவைகளில் இம்மதிப்புகளைப் பொருத்துவோம்.

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{k} = t \quad (>0)$$

$$\phi_{xx} < 0$$

$$\begin{vmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t(2\alpha^2k^2+a^2) & -tab, \\ -tab & -t(2\beta^2k^2+b^2) \end{vmatrix}$$

$$= t^2(2\alpha^2k^2+a^2)(2\beta^2k^2+b^2) - t^2a^2b^2$$
$$= t^2(4\alpha^2\beta^2k^4 + 2a^2\beta^2k^2 + 2b^2\alpha^2k^2) > 0.$$

$$\begin{vmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{xz} & \phi_{yz} & \phi_{zz} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -t(2\alpha^2k^2+a^2) & -tab & -tac \\ -tab & -t(2\beta^2k^2+b^2) & -tbc \\ -tac & -tbc & -t(2\gamma^2k^2+c^2) \end{vmatrix}$$

$$= (-t)\begin{vmatrix} (2\alpha^2 k^2 + a^2) & ab & ac \\ ab & (2\beta^2 k^2 + b^2) & bc \\ ac & bc & (2\gamma^2 k^2 + c^2) \end{vmatrix} < 0$$

எனவே குறித்த புள்ளி பெருமப்புள்ளியே ஆகும்.

பெருமமதிப்பு $= k \cdot Exp \cdot (-1/2)$

$$= e^{-1/2} \left(\frac{a^2}{2\alpha^2} + \frac{b^2}{2\beta^2} + \frac{c^2}{2\gamma^2} \right)^{1/2}$$

பயிற்சி IV—II

கீழ்க்கண்ட சார்பலன்களின் சிறுமப்பெருமங்கள் என்ன ?

1. $x^3 - 3ax^2 - 4ay^2 + 12$
2. $x^2 - 3xy + 2y^2$ [M. Sc. 1966]
3. (a) $(x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 + y^2) + 15$
   (b) $x^2 - 3xy + y^2 + 2x$
4. $x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$ [M. Sc. 1965]
5. $x^3 + y^3 - 3axy$
6. $x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
7. $xy + \frac{8}{x} + \frac{32}{y}$
8. $(x^2 + y^2) \cdot Exp \cdot (x^2 - y^2)$
9. $(x^2 + y^2)\, Exp \cdot (6x + 2x^2)$
10. $xy(5 - x - y)$
11. $x^3y^2(1 - x - y)$
12. $2xy - 3x^2y - y^3 + x^3y + xy$
13. $x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3 + x^5$
14. $2x^4 - 3x^2y + y^2$

15. $(x^2 + y^2 - 1)(xy + 4)$

16. $3x^2 - y^2 + x^3$

17. $2\sin(x + 2y) + 3\cos(2x - y)$

18. $y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3$.

19. $x^3 y^2 (12 - 3x - 4y)$

20. $x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x$

21. $(y - x)^4 + (x - 2)^4$

22. $x^4 + y^4 - 6(x^2 + y^2) + 8xy$ என்ற கோவைக்கு நிலையான மதிப்புகளுள்ள மெய்யான (Real) புள்ளிகள் ஐந்து உள்ளன என்று காட்டு.

[நிலையான புள்ளிகளில் $\phi_r = 0 = \phi_p$ ஆகும்].

23. ஒரு பெட்டியின் நீளம் x, அகலம் y, உயரம் z. இங்கு இம் மூன்று மாறிகளும் $x + 2y + z = 24$ என்ற சமன்பாட்டுடன் தொடர்புடையவை. பெட்டியின் பெரும கன அளவைக் காண்.

24. $(1, 2, 1)$ புள்ளியிலிருந்து, $2x - y + z = 7$ என்ற தளத்திற்கு மிகக் குறைந்த தூரத்தைக் (shortest distance) காண்க.

25. மூன்று எண்களின் மொத்தம் 21; அவைகளின் பெருக்கல் பலன் எப்பொழுது மிக அதிகமாயிருக்கும்?

26. $2x + 3y - z = 12$ என்ற தளத்தில், ஆதிக்கு மிக அருகே உள்ள புள்ளி எது?

27. ஒரு இணைகரத்தின் திண்மத்தின் (Parallelopiped) பக்கங்கள் மூன்று அச்சுக்களின் மேலேயும், அதன் ஒரு உச்சி $x + 3y + 2z = 2$ என்ற தளத்திலும் உள்ளன. அதன் மிக அதிகமான கன அளவினைக் கண்டுபிடி.

28. $\sin x + \sin y + \sin(x + y)$-க்கு $x = y = \frac{\pi}{3}$-ல் பெருமமும், $x = y = \frac{5\pi}{3}$ ல் சிறுமமும் உள்ளன என்று காட்டு.

29. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 3xy + 8z$ என்பதற்குச் சிறுமமதிப்பு (-4) என்று காட்டு.

30. $2xyz - 4zx - 2yz + x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z$ இத்தக் கோவையின் சிறுமப்பெருமப் புள்ளிகளைக் காண்.

31. $u = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z) - 24xyz + 1$ என்பதற்கு $(1, 1, 1)$ ல் சிறுமமும், $(-1, -1, -1)$ல் பெருமமும் உண்டு என்று காட்டி, அவைகளைக் கண்டுபிடி.

32. $3 \log (x^2 + y^2 + z^2) - 2x^3 - 2y^3 - 2z^3$-ன் முனை மதிப்பு $= \log (3/e^2)$ என்று காட்டு.

33. $\dfrac{xyz}{(a + x)(x + y)(y + z)(z + 6)}$ ன் பெருமமதிப்பு, $(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})^{-4}$ என்று காட்டு.

34. $x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ என்பதன் சிறுமப் பெருமங்களை ஆராய்க.

35. $F(a, b) = \int_0^{\pi} \{ \sin x - (ax^2 + bx) \} \, dx$ என்பதின் திரும்புப்புள்ளியில் a, b-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

விடைகள்

1. $x = 0$; $y = 0$-ல் பெருமம்; $x = 2a$, $y = 0$-ல் இரண்டுமில்லை.

2. $x = 0$; $y = 0$ ல் இரண்டுமில்லை.

3. (a) $x = 0$, $y = 0$ ல் இரண்டுமில்லை; $x = \pm a$, $y = 0$ சிறுமம் (b) இரண்டுமில்லை.

4. $(0, 0)$-ல் சிறுமம்

5. $a > 0$ ஆனால், (a, a) ல் பெருமம்; $a < 0$ ஆயின் (a, a)-ல் சிறுமம்.

6. $(\pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{2})$ களில் சிறுமம்.

7. $(2, 2)$-ல் சிறுமம்

8. $(0, 0)$-ல் சிறுமம் ; $(0, \pm 1)$-ல் இரண்டுமில்லை.

9. முனைமதிப்புகள் $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1/2, 0)$-ல்.

10. $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ பெருமம் ; $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(5,0)$ களில் இரண்டும் இல்லை.

11. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ல் பெருமம்

12. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ மற்றும் $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$-ல் பெருமங்கள் ; $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ல் சிறுமம்.

13. $(0, 0)$-ல் இரண்டுமில்லை.

14. $(0, 0)$-ல் இரண்டுமில்லை.

15. $y = x$ என்ற நேர்கோட்டில், ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சிறுமம்.

16. $(-2, 0)$ ல் பெருமம்.

17. பெருமங்கள் ; $x = \frac{\pi}{10}(1 + 4m + 12n)$;

$$y = \frac{\pi}{5}(1 + 4m + 2n)$$

சிறுமங்கள் ; $x = \frac{\pi}{10}(7 + 4m + 12n)$;

$$y = \frac{2\pi}{5}(1 + 2m + 2n)$$

இங்கு m, n இரண்டும் மிகை முழு எண்கள்.

18. $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ ல் சிறுமம்

19. $(2, 1)$ ல் பெருமம்.

20. $(4, 0)$ ல் பெருமம் ; $(6, 0)$ ல் சிறுமம்

21. $(2, 2)$ ல் சிறுமம்.

22. $\phi_x = 0 = \phi_y$ என்றால் கிடைக்கும் சமன்பாடுகளுக்கு $(0, 0)$ என்பது ஒரு மூலம். மற்ற மூலங்கள் மெய்யானவை என்று காட்ட, கிடைக்கும் நாற்படி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவை என்று காட்டினால் போதும்.

23. $V = 256$

24. $\sqrt{6}$

25. 7, 7, 7

26. 12/7, 18/7

27. 4/81.

30. (0, 3, 1), (0, 1, — 1), (2, 1, 1), (2, 3, — 1)-களில் ஒன்றும் கிடையாது. (1, 2, 0)-ல் மாத்திரம் சிறுமம்.

31. — 5 ; 7

33. பெருமப்புள்ளி $(ak, ak^2, ak^3,)$; இங்கு $b = ak^4$.

34. சிறுமம் (1, 2); பெருமம் (— 1, — 2); (1, — 2), (2, — 1)-ல் இரண்டும் இல்லை.

35. $a = \frac{20}{\pi^2} - \frac{320}{\pi^4}$; $b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2}$.

§ 4.10 துணை நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட சிறுமப் பெருமங்கள் : (Maxima, and Minima under subsidiary conditions) :

ஒரு சார்பலனின் சிறுமப்பெருமங்களைக் கணக்கிடும் வகைகளை இதுவரை பார்த்தோம். அவைகளில் வேறு நிபந்தனைகள் எதுவும் குறிக்கப்பெறவில்லை. ஒரு சார்பலனின் சிறுமப் பெருமங்கள் மற்றுமொரு நிபந்தனைக்கு (மாறிகளிடையே) உட்பட்டுக் கணக்கிட வேண்டிய நிலைகள் பல நேரிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக, மூன்று மாறிகளின் பெருக்கல்பலன் மிக அதிகமாயிருக்க வேண்டும்; ஆனால், அவைகளின் மொத்தம் 15 ஆகவே இருக்கவேண்டும்.

அப்பொழுது, மூன்று மாறிகளை x, y, z என்று குறிப்பிட்டால் $u = xyz$-ன் பெருமமதிப்பை, $x + y + z = 15$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டுக் கணக்கிட வேண்டியிருக்கிறது.

இது போன்ற எளிதான கணக்குகளை நேரிடையாகப் போட்டு விடலாம்.

நிபந்தனையிலிருந்து $z = 15 - x - y$.

எனவே $u = xy \quad (15 - x - y)$-ன் பெருமமதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$u_x = 15y - 2xy - y^2$$
$$u_y = 15x - x^2 - 2xy$$

$u_x = u_y = 0$ என்று பிரதியிட, $x = 0, y = 0$ அல்லது $x = y = 5$ என்று வருகிறது. முதல் முடிவு ஏற்றதல்ல. (ஏனென்ருல் 'எண்'கள் வராது!)

எனவே $x = 5, y = 5$ ஆயின் $z = 5$ ஆகிறது. இது பெருமமதிப்பு தான் என்பதை எளிதில் காணலாம்.

இவ்வாறு எளிதாக இல்லாத கணக்குகளுக்குப் பயன்படுவது '**லாக்ராஞ்சின் தேராத பெருக்கிகள்** முறையாகும் (Lagrange's Method of undetermined Multipliers).

அதனை இப்போது விளக்குவோம்.

லாக்ராஞ்சின் தேராத பெருக்கிகள் முறை.

$$u = \phi\,(x_1, x_2, \dots x_n\,;\; y_1, y_2 \dots y_m) \qquad (A)$$

ஒரு சார்பலன். இதன் சிறுமப்பெருமங்களைக் கணக்கிட வேண்டும். இதிலுள்ள $(n + m)$ மாறிகளும் தனித்தவை (Independent) அல்ல. அவைகளிடையே கீழ்க்காணும் m-சமன்பாடுகள் உள்ளன.

$$\left|\begin{array}{l} F_1\,(x_1, x_2 \dots\dots x_n\,;\; y_1, y_2 \dots\dots y_m) = 0 \\ F_2\,(x_1, x_2 \dots\dots x_n\,;\; y_1, y_2 \dots\dots y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m\,(x_1, x_2 \dots\dots x_n\,;\; y_1, y_2 \dots\dots y_m) = 0 \end{array}\right| \qquad (B)$$

(B)-என்கிற துணைநிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு (A)-ன் முனை மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டியது, நம் நோக்கம். (A)-ஐ வகையிட்டு, அதனை நிலைப்புள்ளிகளில் பூச்சியத்திற்கு சமமாக்கினால்,

$$du = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots\dots + \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\,dx_n + \frac{\partial\phi}{\partial y_1}\cdot dy_1$$
$$+ \dots\dots + \frac{\partial\phi}{\partial y_m} = 0 \;\dots\dots \qquad (C)$$

(B)-யிலுள்ள சமன்பாடுகளையும் வகையிட,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m=0\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot dy_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot dy_m=0\end{aligned}\right\}\quad (D)$$

(D)-யிலுள்ள சமன்பாடுகளை முறையே $\lambda_1, \lambda_2 \dots\dots \lambda_m$ என்னும் தேராத பெருக்கிகளைக் கொண்டு பெருக்கி, (C)-யுடன் சேர்த்தால் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு (E) கிடைக்கும்.

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\sum\lambda_r\frac{\partial F_r}{\partial x_1}\right]dx_1+\dots\dots+\left[\frac{\partial\phi}{\partial y_1}+\sum\lambda_r\frac{\partial F_r}{\partial y_1}\right]dy_1+\dots\dots=0 \qquad (E)$$

இப்பொழுது அந்த λ-மதிப்புகளை $(dy_1), (dy_2) \dots\dots\dots (dym)$ களுடைய கெழுக்களைப் பூஜ்ஜியமாக்குமாறு தேர்ந்தெடுப்போம். அதாவது,

$$\left|\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y_1}+\sum\lambda_r\frac{\partial F_r}{\partial y_1}=0\\ \frac{\partial\phi}{\partial y_2}+\sum\lambda_r\frac{\partial F_r}{\partial y_2}=0\\ \frac{\partial\phi}{\partial y_m}+\sum\lambda_r\frac{\partial F_r}{\partial y_m}=0\end{aligned}\right| \qquad (F)$$

இந்த மதிப்புகளைப் பிரதியிட (E) என்பது

$$du=\left[\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\sum\lambda_r\cdot\frac{\partial F_r}{\partial x_1}\right]\cdot dx_1+\dots\dots$$

$$\dots\dots+\left[\frac{\partial\phi}{\partial x_n}+\sum\lambda_r\cdot\frac{\partial F_r}{\partial x_n}\right]\cdot dx_n=0 \qquad (G)$$

அதாவது, நிலைப்புள்ளிகளில், ஒவ்வொரு அடைப்பிற்குள்ள கோவைகளும் பூச்சியமாக வேண்டும்.

ஆக

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \sum \lambda_r \frac{\partial F_r}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \sum \lambda_r \frac{\partial F_r}{\partial x_2} = 0 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} + \sum \lambda_r \cdot \frac{\partial F_r}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right| \quad (H)$$

எனவே, நாம் தீர்க்கவேண்டிய மாறிகள் $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$; $y_1, y_2 \ldots\ldots y_m$; $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_m$ — அதாவது மொத்தமாக $(2m+n)$. இவைகளைத் தீர்க்க நம்மிடம் $(2m+n)$ சமன்பாடுகள் உள்ளன: (B)-ல் m-சமன்பாடுகள்; (F)-ல் m சமன்பாடுகள்; (H)-ல் n சமன்பாடுகள். எனவே, தீர்வுகளைக் காணமுடியும்.

இவைகளைக் கண்டால், நிலைப்புள்ளிகளின் கூறுகளைக் கணக்கிட்டு, u-ன் சிறும, பெருமங்களைத் தெளியலாம்.

இம் முறையினைத் தெளிவாக்கும் பல எடுத்துக்காட்டுகளைக் கீழே காணலாம்.

எ. கா. 19:

$u = xy$ என்ற சார்பலனுக்கு, $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிலைப்புள்ளிகள் எங்கெங்கு உள்ளன?

$u = xy$ என்பதை வகையிட $du = x \cdot dy + y \cdot dx$. $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்பதை வகையிட $2x\ dx + 2y\ dy = 0$

இரண்டாம் சமன்பாட்டை λ வினால் பெருக்கி, முதல் சமன் பாட்டுடன் சேர்த்தால்

$$(y + 2\lambda\ x)\ dx + (x + 2\lambda\ y)\ dy = 0$$

எனவே, $y + 2\lambda x = 0$ மற்றும் $x + 2\lambda y = 0$ $\quad\ldots(\ddagger)$

இரண்டையும் முறையே $(x, y$-ஆல் பெருக்கிக் கூட்டி, பிரதியிட

$2u + 2\lambda\ (a^2) = 0$ அல்லது $\lambda = \frac{-u}{a^2}$ என்று வருகிறது.

(⁑) சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\lambda = \frac{-y}{2x} = \frac{-x}{2y} = \frac{-xy}{a^2};$$ ஆதலால்

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}},\ y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$ என்ற தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன.

இந்தப் புள்ளிகள் தான் நிலைப்புள்ளிகள்.

குறிப்பு: எடுத்துக்காட்டு மிக எளிதானதால், முன் கூறப்பட்ட முறைகளைக் கொண்டே, தீர்வு காணலாம்.

எ. கா. 20.

$x^2 + y^2 + z^2$ என்ற கோவையின் சிறுமமதிப்பை $x + y + z = 3a$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டுக் கண்டுபிடி.

$u = x^2 + y^2 + z^2$ என்பதை வகையிட

$du = 2x \cdot dx + 2y \cdot dy + 2z \cdot dz$ என்று வரும்.

$x + y + z = 3a$-ஐ வகையிட $dx + dy + dz = 0$ என்று வரும். இரண்டாவதை λ-வால் பெருக்கி, முதலாவதுடன் கூட்ட,

$$(2x + \lambda)\, dx + (2y + \lambda)\, dy + (2z + \lambda)\, dz = 0$$

அதாவது $2x + \lambda = 0 = 2y + \lambda = 2z + \lambda$

எனவே, $\frac{-\lambda}{2} = x = y = z$ • இவைகளை $x + y + z = 3a$ல் பிரதியிட, $x = a = y = z$ என்று கிடைக்கிறது.

அதாவது u-ன் சிறுமமதிப்பு $a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$ ஆகும்.

எ. கா. 21:

$u = a^3\lambda^2 + b^3 y^2 + c^6 z^2$ என்ற சார்பலன் $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டுள்ளது. u ன் நிலைமதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

முன் இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளில் செய்தது போலவே செய்ய,

$$2a^3 x - \frac{\lambda}{x^2} = 0; \quad 2b^3 y - \frac{\lambda}{y^2} = 0; \quad 2c^3 z - \frac{\lambda}{z^2} = 0.$$

அதாவது $\frac{\lambda}{2} = a^3 x^3 = b^3 y^3 = c^3 z^3$

அல்லது $ax = by = cz$.

u-ன் மதிப்பு, $u = 3a^3 x^3$.

இங்கு x, y, z-ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$ax = by = cz = k$ என்போம்.

$$x = \frac{k}{a}; \quad y = \frac{k}{b}; \quad z = \frac{k}{c} \cdot \text{ எனவே,}$$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ என்பதில் பிரதியிட $\frac{1}{k}\ (a + b + c) = 1$

அல்லது $a + b + c = k$.

எனவே $x = \frac{a+b+c}{a}; \ y = \frac{a+b+c}{b}; \ z = \frac{a+b+c}{c}$

ஆக, நிலைமதிப்பு $u = 3\,(a + b + c)^3$.

எ. கா. 22.

$$lx + my + nz = 0 \text{ மற்றும் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்ற இரண்டு நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ என்ற கோவையின் சிறுமப் பெருமங்களைக் கணக்கிடு.

$$u = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \qquad (i)$$

$$F = lx + my + nz = 0 \qquad (ii)$$

$$\phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ என்க.} \qquad (iii)$$

இவைகளை வகையிட

$$du = \frac{2x}{a^4} \cdot dx + \frac{2y}{b^4} \cdot dy + \frac{2z}{c^4} \quad dz = 0 \qquad (iv)$$

ஒரு நிலைப்புள்ளியில்.

$$dF = l dx + m dy + n dz = 0 \qquad (v)$$

ஒரு நிலைப்புள்ளியில்.

$$d\phi = \frac{2x}{a^2} \cdot dx + \frac{2y}{b^2} \cdot dy + \frac{2z}{c^2} \cdot dz = 0 \qquad (vi)$$

ஒரு நிலைப்புள்ளியில்.

$$(iv) + \lambda_1 (v) + \lambda_2 (vi) =$$

$$\left[\frac{x}{a^4} + l\lambda_1 + \frac{x}{a^2}\lambda_2\right] dx + \left[\frac{y}{b^4} + m\lambda_1 + \frac{y}{b^2}\lambda_2\right] dy$$

$$+ \left[\frac{z}{c^4} + n\lambda_1 + \frac{z}{c^2} \cdot \lambda_2\right] dz = 0$$

எனவே,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{a^4} + l\lambda_1 + \frac{x}{a^2}\lambda_2 = 0 \\ &\frac{y}{b^4} + m\lambda_1 + \frac{y}{b^2}\lambda_2 = 0 \\ &\frac{z}{c^4} + n\lambda_1 + \frac{z}{c^2}\lambda_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (vii)$$

இவைகளை முறையே x, y, z-களினால் பெருக்கிக் கூட்டினால்

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) + \lambda_1 (lx + my + nz)$$

$$+ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\lambda_2 = 0$$ என்று வருகிறது.

(i), (ii), (iii) — மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$u + \lambda_2 = 0$$

இந்த மதிப்பை (vii)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{x}{a^4} + l\lambda_1 - \frac{xu}{a^2} = 0 ; \frac{y}{b^4} + m\lambda_1 - \frac{yu}{b^2} = 0 ;$$

$$\frac{z}{c^4} + n\lambda_1 - \frac{2u}{c^2} = 0$$

எனவே, $x = -\dfrac{a^4 l\lambda_1}{1 - a^2u}$; $y = \dfrac{-b^4 m\lambda_1}{1 - b^2u}$; $z = \dfrac{-c^4 n\lambda_1}{1 - c^2u}$

இவைகளை (ii)-ல் பிரதியிட,

$$\lambda_1 \left[\frac{a^4 \ l^2}{1 - a^2u} + \frac{b^4m^2}{1 - b^2u} + \frac{c^4n^2}{1 - c^2u}\right] = 0$$

அதாவது, u-ன் சிறுமப் பெரும மதிப்புகள்

$\dfrac{a^4l^2}{1 - a^2u} + \dfrac{b^4m^2}{1 - b^2u} + \dfrac{c^4n^2}{1-c^2u} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இது ஒரு இருபடி சமன்பாடானதால், இரண்டும் இதிலிருந்தே கிடைக்கும்.

எ. கா. 23 :

x, y, z என்ற மாறிகள் $\phi(x)\cdot\phi(y)\cdot\phi(z) = a^3$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துகின்றன. $\phi(a) = d \neq 0$, மற்றும் $\phi'(a) \neq 0$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பொழுது $[f(x) + f(y) + f(z)]$ என்ற கோவை பெருமமதிப்பை $x = y = z = a$ என்ற புள்ளியில் பெறுமானல் $f''(a) \cdot < f'(a) \cdot \left[\dfrac{\phi''(a)}{\phi'(a)} - \dfrac{\phi'(a)}{\phi(a)}\right]$ ஆக இருக்கவேண்டும் என்று காட்டு. [M. Sc. 60].

இங்கு $u = f(x) + f(y) + f(z)$

நிலைப்புள்ளியில் $du = f'(x)\,dx + f'(y)\,dy$

$$+ f'(z)\cdot dz = 0 \qquad \text{(i)}$$

கொடுக்கப்பட்ட $\phi(x)\cdot\phi(y)\cdot\phi(z)=a^2$ என்ற சமன்பாட்டை வகையிட,

$$\phi(y)\cdot\phi(z)\cdot\phi'(x)\cdot dx-\phi(x)\cdot\phi(z)\cdot\phi'(y)\cdot dy + \phi(x)\cdot\phi(y)\,\phi'(z)\cdot dz = 0 \qquad \text{(ii)}$$

இவைகளைப் பொருத்த,

$$\frac{f'(x)}{\phi(y)\cdot\phi(z)\cdot\phi'(x)} = \frac{f'(y)}{\phi(x)\cdot\phi'(y)\cdot\phi(z)}$$

$$= \frac{f'(z)}{\phi(x)\cdot\phi(y)\cdot\phi'(z)} = \text{என்க.}$$

எனவே $x=a=y=z$ என்ற புள்ளியில், (iii)

$$\frac{f'(a)}{\phi'(a)\cdot\phi(a)\cdot\phi(a)} = \lambda \text{ அல்லது } \lambda = \frac{f'(a)}{\phi'(a)\cdot[\phi(a)]^2}$$

இந்தப் புள்ளி பெருமப் புள்ளியாக வேண்டுமானுல் $d^2u<0$ ஆக வேண்டும்.

$$d^2u = [f'(x)\cdot a^2x + f'(y)\cdot d^2y + f'(z)\cdot d^2z] + f''(y)\cdot dx^2 + f''(z)\cdot dy^2 + f''(z)\,dz^2] \qquad \text{(iv)}$$

இப்பொழுது (ii)-ஐ $\phi(x)\cdot\phi(y)\cdot\phi(z)=a^2$-ஆல் வகுக்க

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\cdot dx + \frac{\phi'(y)}{\phi(y)}\cdot dy + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\cdot dz = 0 \qquad \text{(v)}$$

இதனை வகையிட,

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\cdot d^2x + \frac{\phi'(y)}{\phi(y)}\cdot d^2y + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\cdot d^2_z$$

$$+\sum\left[\frac{\phi(x)\cdot\phi''(x)-[\phi'(x)]^2}{\{\phi(x)\}^2}\right]dx^2 = 0 \qquad \text{(vi)}$$

$x=a=y=z$ என்று பொருத்த

$$d^2u = f'(a)(d^2x + d^2y + d^2z) + f''(a)[dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

என்றும், (vi) :—

$$\left[\frac{\phi'(a)}{\phi(a)}\right](d^2x + d^2y + d^2z) + \frac{\phi(a)\cdot\phi''(a) - \{\phi'(a)\}}{\{\phi(a)\}^2}$$

$$\times (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

என்றும் வருகிறது. இரண்டாவதிலிருந்து முதலாவதிற்குப் பிரதியிட,

$$d^2u = \left\{ f'(a) \left[\frac{\phi(a)\cdot\phi''(a) - \{\phi'(a)\}^2}{\{\phi(a)\}^2}\right] \cdot \frac{\phi(a)}{\phi'(a)} \right.$$

$$\left. + f''(a) \right\} (dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0$$

ஆகவேண்டுமானால்,

$$f''(a) - f'(a) \left\{ \frac{\phi(a)\cdot\phi''(a) - [\phi'(a)]^2}{\phi(a)\cdot\phi'(a)} \right\} < 0$$

அல்லது,

$$f''(a) < f'(a) \left[\frac{\phi(a)\cdot\phi''(a) - [\phi'(a)]^2}{\phi(a)\cdot\phi'(a)} \right]$$ என்று வருகிறது.

பயிற்சி IV—III

1. x, y, z மூன்றும் மிகையாயிருக்கையிலும், $xy + yz + zx = 1$ என்றிருக்கையிலும், $u = xyz$ என்பதன் திரும்பு மதிப்பைக் காண்க.

2. $x^2 + y^2 + z^2$-ன் சிறும, பெரும மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளில் கண்டுபிடி.

(i) $ax + by + cz = P$ (ii) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$;

(iii) $ax + by + cz = a'x + b'y + c'z = 1$

3. $x + y + z = 3$ என்னும் மதிப்பு $x^m y^n z^p$ என்பதின் பெருமமதிப்பென்ன ?

4. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, $lx + my + nz = 0$ என்ற நிபந்தனைகள் இருக்கும்போது $x^2 + y^2 + z^2 = u$ என்பதின் நிலை மதிப்புகள் என்ன ?

5. $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 1$ என்னும்பொழுது $x^2 + y^2 = u$ என்பதன் நிலை மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

6. $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$ என்னும் பொழுது $x^2 + y^2 + z^2$ என்பதன் சிறும, பெருமங்கள் என்ன?

7. $x^l + y^m + z^n = k$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு $ax^p + by^q + cz^r$ என்பதின் சிறும, பெருமங்களைக் கணக்கிட்டால்,

அவை $\dfrac{x^{p-l}}{l/pa} = \dfrac{y^{q-m}}{m/qb} = \dfrac{z^{r-n}}{n/rc}$ என்று இருக்கும் எனக்காட்டு.

8. $\Sigma x^2 = k^2$; $\Sigma lx = 0$ என்பது ஒரு வட்டம். இதன் மேலுள்ள சில புள்ளிகளில் $u = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ என்பது சிறுமப் பெருமங்களை அடைகிறது. அவை யாவை ? [M. Sc. 67]

9. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$; மற்றும் $lx + my + nz = 0$ என்பதும் வெட்டும் வளைகோட்டிற்கும் ஆதிக்கும் உள்ள தூரத்தின் மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகளைக் காண்க. [M. Sc. 66].

10. $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ என்ற நீள்வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியில் அதன் தொடுகோட்டிற்கும், ஆதிக்குமிடையேயுள்ள தூரம் மிக அதிகமாக உள்ளது. அவை யாவை ?

11. கொடுக்கப்பட்ட கன அளவுள்ள, மற்றும் மிகச் சிறிய மேற்பரப்புள்ள இணைகரத்தின் திண்மத்தைக் (Parallelopiped) கண்டுபிடி.

12. $x^4 + y^4 = 1$ என்னும்பொழுது, $u = 5x^2 + 4xy + 5y^2$ என்பதன் சிறுமப்பெருமங்கள் எவை ?

13. $ax^2 + by^2 = ab$ என்ற நிபந்தனை x, y இடையே இருந்தால் $(x^2 + xy + y^2)$ கோவையின் சிறுமப் பெருமங்கள் கீழ்க் கண்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்று காட்டு:

$$4(\theta - a)(\theta - b) = ab.$$

14. $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ என்னும்போதும், $lx + my + nz = p$ என்னும் போதும் $u = xyz$ என்பதன் முனைமதிப்புகளைக் கண்டுபிடி. [M. Sc. 63]

15. $lx + my + nz = 1$ என்ற நிபந்தனை இருப்பின், $u = xy + yz + zx$-ன் நிலைமதிப்பென்ன?

16. ஒரு முக்கோணத்தில் $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$-ன் பெருமதிப்பைக் காண்.

17. $x^2 + xy + y^2 = 75$ என்னும் பொழுது $(ax + by)$ ன் பெருமமதிப்பு என்ன?

18. $lx + my + nz = 0$ என்ற தளத்திலிருந்து (a, b, c) என்ற புள்ளியின் மிக அதிக தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

19. ஒரு கோளத்தின் மற்றும் ஒரு கனசதுரத்தின் மேற்பரப்புகளின் மொத்தம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவைகளின் கன அளவுகளின் மொத்தம் மிகக் குறைவாக இருக்கும்பொழுது, கோளத்தின் விட்டமும், கனசதுரத்தின் ஒரு கரமும் சமமாக இருக்கும் எனக்காட்டு.

20. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ என்பது நிபந்தனை. இதற்குட்பட்டு $u = a^3 x^2 + b^3 y^2 + c^3 z^2$ என்பதன் நிலைமதிப்புகள் $ax = by = cz$ என்னும் போது நிகழும் என்றும் அம் மதிப்பு பெருமமாயிருக்க $abc(a + b + c)$ என்பது மிகையாகவும், சிறுமமாயிருக்க $abc(a + b + c)$ குறையாகவும் இருக்கும் எனக்காட்டு.

21. செவ்வக வடிவிலுள்ள ஒரு திறந்த பெட்டியின் கன அளவு 32 கன அடி. அதன் பரப்பு மிகக் குறைவாக இருக்க வேண்டுமானால், அதன் அளவுகள் என்னென்ன?

22. $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$; $z = 0$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கும், ஆதிக்கும் இடையேயுள்ள மிகக் குறைவான தூரம் எது?

23. $x^2 + y^2 + z^2$ என்ற கோவைக்கு,

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$, மற்றும் $x + y = z$ என்ற நிபந்தனை களுக்குட்பட்ட சிறுமப்பெருமங்களைக் கணக்கிடுக. உன் முடிவு களை வடிவ கணக்கு வழியில் விளக்கு.

24. xy^2z^2 என்ற கோவைக்கு, $x + y + z = 6$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட சிறுமப் பெருமங் களைக் கணக்கிடு.

25. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$ என்ற நீள்வளைய கோளத்திற்குள் (Ellipsoid) வரையப்படக்கூடும் இணைகரத்தின் திண்மத்தின் (Parallelopiped) அதிகக் கன அளவைக் கண்டுபிடி.

26. $xyz = a$, $y = bx$ என்பனவற்றின் வெட்டும் வளை கோட்டிற்கும், ஆதிக்கும் இடையே உள்ள மிகக் குறைவான தூரம் என்ன?

27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, மற்றும் $Ax + By + Cz = 0$ என்பனவற்றின் வெட்டும் வளைகோட்டிற்கும் (Curve of Intersection), ஆதிக்கும் இடையே உள்ள மிகக் குறைவான, மிக அதிகமான தூரங்கள் 't' என்றால்,

$\frac{A^2a^2}{a^2 - t^2} + \frac{B^2b^2}{b^2 - t^2} + \frac{C^2 - c^2}{c^2 - t^2} = 0$ என்று நிறுபி.

28. $z = x^2 + y^2$ என்ற கனப்பரவளையத்தின் (Paraboloid) மேலுள்ள ஒரு புள்ளி $(3, -6, 4)$ என்ற புள்ளிக்கு மிக அருகிலே உள்ளது. அந்தப் புள்ளி யாது ?

விடைகள்

1. $(3\sqrt{3})^{-1}$

2. (i) $p^2/2a^2$ என்பது சிறுமம்

(ii) நிலை மதிப்புகள் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ; $(1/a - u)(1/b - u)(1/c - u) = 0$

(iii) அவைகள்

$$\begin{vmatrix} u & 1 & 1 \\ 1 & \Sigma a^2 & \Sigma aa' \\ 1 & \Sigma aa' & \Sigma a'^2 \end{vmatrix} = 0$$

3. $\dfrac{m^m n^n p^p \cdot 3^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}$

4. $\dfrac{l^2}{Au-1} + \dfrac{m^2}{Bu-1} + \dfrac{n^2}{Cu-1} = 0$ என்பதன் மூலங்கள்தான்.

மற்றும் $x : y : z = \dfrac{l}{Au-1} : \dfrac{m}{Bu-1} : \dfrac{n}{Cu-1}$.

5. $(AB - H^2)\, u^2 - (A+B)\, u + 1 = 0$ என்பதன் மூலங்கள்.

6. அவைகள்

$$\begin{vmatrix} a - \dfrac{1}{u} & h & g \\ h & b - \dfrac{1}{u} & f \\ g & f & c - \dfrac{1}{u} \end{vmatrix} = 0 \text{ என்பதன் மூலங்கள்}$$

9. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ என்பதன் சிறுமப் பெருமங்களே, அவைகள். $\sum \left(\dfrac{l^2}{a^2 - r^2} \right) = 0$ என்பதன் மூலங்கள்.

10. $(1, 1), (-1, -1)$.

11. k என்பது கொடுக்கப்பட்ட கன அளவானுல், பரப்பு $= 6k^{2/3}$.

12. $y = x,\ 2x^4 = 1$; மற்றும் $y = -x,\ 2x^4 = 1$ என்னும் பொழுது பெருமங்கள் முறையே $7\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}$.

$y = -2x,\ 17x^4 = 1$ மற்றும் $x = -2y,\ 17y^4 = 1$.

என்னும்போது சிறுமங்கள் முறையே $\sqrt{17},\ 1/\sqrt{17}$.

15. $(2mn + 2nl + 2lm - l^2 - m^2 - n^2)^{-1}$

16. $1/8$

17. $10\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$

18. $(al + bm + cn)/\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$

21. அளவுகள் : $4 \times 4 \times 2$ கன அடிகள்

22. 5

23. பெருமம் 10; சிறுமம் 75/17. கொடுக்கப்பட்ட கன நீள் வளையம் (Ellipsoid) மற்றும் தளம் இரண்டும் வெட்டும் வளை கோட்டிற்கும் ஆதிக்குமிடையேயுள்ள மிகச் சிறிய, மிகப்பெரிய தூரங்களே இவை. வெட்டும் வளைகோடு ஒரு நீள் வளைய மாதலால் 10, 75/17 என்பவை அதன் அசை அச்சுகள் ஆகும்.

24. $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ என்னும் போது பெருமம் 108.

25. $64\sqrt{3}$.

26. $3\sqrt{a(b^2 + 1)/2b}$.

28. $(1, -2, 5)$

5. அணுகுகோடுகள் அல்லது தொலைத்தொடுகோடுகள்

(ASYMPTOTES)

5.1. வரையறைகள்

n படி சமன்பாட்டினையுடைய ஒரு வளைகோட்டினை ஒரு நேர் கோடு பொதுவாக n-புள்ளிகளில் வெட்டும். எடுத்துக்காட்டாக $F(x, y) = 0$ என்பது ஒரு n-படித்தான வளைகோடு. $y = mx + c$ என்பது நேர்கோடு ; இந்த y-மதிப்பை வளைகோட்டில் பிரதியிட, $F(x, mx + c) = 0$. இது x-ல் n படித்தான சமன்பாடு; இதனைத் தீர்க்க, $x_1, x_2, \ldots \ldots x_n$ என்ற மூலங்கள் கிடைக்கும். இவைகளுக்கான y-மதிப்புகளை, $y_j = mx_i + c \; (j = 1, 2, \ldots n)$ என்பதன் வழியாகக் கணக்கிடலாம். எனவே இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ என்பவை

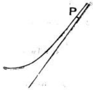
இவைகளில் இருபுள்ளிகள் ஒன்றுபட்டால், $y = mx + c$ என்பது $F(x, y) = 0$ தின் ஒரு தொடுகோடு ஆகும். இருமதிப்புகளும் கந்தழி (infinite) ஆனால், தொடுகோட்டை அணுகுகோடு எனக் கூறுவோம், அதாவது அணுகுகோடும் வளைகோடும் கந்தழி அருகில் செல்லச்செல்ல ஒன்றையொன்று அணுகிக்கொண்டே வரும்.

அணுகுகோட்டைக் கந்தழியில் தொடுகோடு அல்லது தொலைத் தொடுகோடு (tangent at infinity) என்றும் கூறலாம். அல்லது $P(x, y)$ என்பது வளைகோட்டின் மேலுள்ள புள்ளியானால், அப் புள்ளியானது வளைகோட்டின் மேலேயே கந்தழிக்கு அருகில் செல்லச் செல்ல, P-யிலிருந்து நேர்கோட்டிற்கு உள்ள தூரம் குறைந்து கொண்டே வருமானால், அந்த நேர்கோட்டை அணுகுகோடு என்போம்.

$Y = \tan x$ என்னும் வளைகோட்டிற்கு $x = \pi/2,\ 3\pi/2 \ldots$ முதலியன அணுகுகோடுகள் என்பதை நாம் அறிவோம். மற்றும்



படம் 5·1 (a)



படம் 5·1 (b)

அடைத்த வளைகோடுகளான (closed curves) வட்டம், நீள்வட்டம், நெஞ்சுவளை முதலியவைகளுக்கு அணுகுகோடுகள் இருக்க முடியாது. அணுகுகோடுகள் இருக்கவேண்டுமானால், வளைகோடு கந்தழிக்கும் செல்லுவதாக இருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு: நேர்கோடு முழுவதுமே கந்தழியில் இருந்தால் அது அணுகுகோடாகாது.

5·2 அணுகுகோடுகளைக் கண்டுபிடிக்க விதிகள்

விதி 1

$$P\text{-இன் மதிப்பு} = \frac{y - mx - c}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$y = mx + c$ என்பது அணுகுகோடாக வேண்டுமானால், $x \to \infty$ என்றாகும்பொழுது, $p \to 0$ ஆக வேண்டும், அதாவது,

$(y - mx - c) \to 0$
அல்லது $(y - mx) \to 0$

மற்றும் $\frac{y}{x} - m - \frac{c}{x} \to 0$ ஆல்லது $\frac{y}{x} \to m$ எனவே முதல் விதி

$x \to \infty$ ஆனல்,

(i) $\frac{y}{x} \to m$ மற்றும் (ii) $(y - mx) \to c$ ஆகவேண்டும்.

எ. கா. 1

$xy = 1$ என்பதன் அணுகுகோடுகளைக் கண்டுபிடி.

$y = \frac{1}{x}$ எனவே $x \to \infty$ ஆனால் $\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} \to 0$ ஆகும்.

அதாவது $m = 0$; எனவே $(y - mx) \to y = \frac{1}{x} \to 0$

எனவே $c = 0$

ஆக, அணுகுகோடு $y = 0$ என்று வருகிறது.

குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்ட வளைகோடு x, y-இரு அச்சுகளுக்கும் சமச்சீராக உள்ளதால் (Symmetric with respect to both axes), $x = 0$ என்பதும் அணுகுகோடாகிறது. இத்தவகை அணுகுகோடுகளைக் கணக்கிட, நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $x = m'y + c'$ என்று வைத்து,

$$m' = \underset{x \to \infty}{Lt} \left(\frac{x}{y}\right), \text{ மற்றும் } c' = \underset{x \to \infty}{Lt} \left(x - m'y\right)$$

என்று கணக்கிடவேண்டும்.

விதி 2

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டில் $y = mx + c$ என்று பிரதியிட்டு, கிடைக்கும் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதற்கு இரு கந்த மூலங்கள் (infinite roots) இருக்க வேண்டும். இதற்கு இயற்கணிதவகையில் x^n மற்றும் x^{n-1} களின் கெழுக்கள் பூச்சியமாக வேண்டும் என்பதை அறிவோம். எனவே இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தால், $m_1\ m_2, m_3 ... m_n$, மற்றும் $c_1, c_2, c_3\ c_n$; என்ற மூலங்கள் கிடைக்கும். அப்பொழுது அணுகுகோடுகள்

$y = m_j\ x + c_j\ [j = 1, 2, 3, ...n]$ என்பவைகளாகும்.

குறிப்பு 1: இந்த வழியிலும் y-கோட்டிற்கு இணையான அணுகு கோடுகள் கிடைக்காது. அவையிருந்தால் $x = m'y + c'$ என்று தொடங்கவேண்டும்.

குறிப்பு 2: பொதுவாக, சமன்பாடு n—படித்தானதானுல், n—அணுகுகோடுகள் இருக்கும். அவைகளில் சில மெய்யானவை களாகவும், சில கற்பனையானவைகளாகவும் இருக்கலாம்.

எ. கா. 2.

$$x^2 y - 4y = 4$$

இது ஒரு முப்படி சமன்பாடானதால் மூன்று அணுகு கோடுகள் இருக்கலாம்.

முதலில் $y = mx + c$ என்று பிரதியிட

$$x^2 (mx + c) - 4 (mx + c) - 4 = 0$$

அல்லது $x^3 (m) = x^3 (c) - 4 (mx) - (4c + 4) = 0$

x^3-இன் கெழுவையும். x^2-இன் கெழுவையும் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்கினுல், $m = 0$, $c = 0$ என்று வருகிறது.

எனவே $y = 0$ என்பது ஒரு அணுகுகோடு. மற்ற இரண்டினையும் காண, $x = m'y + c'$ என்று பொருத்துவோம்.

$$(m'y + c')^2 y - 4y - 4 = 0$$

அல்லது $(m'^2) y^3 + 2 m'c'y^2 - 4y + c'^2 - 4 = 0$

முன்போலவே y^3-இன் கெழுவைப் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க

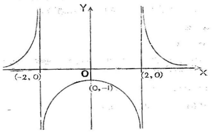
$m'^2 = 0$ அல்லது $m' = 0$

y^2-இன் கெழுவை 0 என்று பொருத்திஞல்,

$2 m' c' = 0$; ஏற்கனவே $m' = 0$ ஆனதால் இதிலிருந்து c'-இன் மதிப்பைக் கணக்கிடமுடியாது. அப்பொழுது அடுத்த y-உறுப்பின் கெழுவையும் (இங்கு y-ன்) பூச்சியமாக்க வேண்டும்.

எனவே $c'^2 - 4 = 0$ அல்லது $c' = \pm 2$; ஆக $x = + 2$, $x = - 2$ என்ற இரு அணுகுகோடுகள் கிடைக்கின்றன.

எனவே குறித்த வளைகோட்டிற்கு மூன்று அணுகு கோடுகள் : $y = 0, x = 2, x = -2$. சுமாராக வளைகோட்டின் வடிவம் கீழ் வருமாறு :



படம் 5·2

விதி 3 :

வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை ஒருபடித்தான உறுப்புகளாகக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

$$x^n \cdot f_n \left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} f_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right) + \dots = 0$$

இப்பொழுது $y = mx + c$ அல்லது $\frac{y}{x} = m + \frac{c}{x}$

என்று பிரதியிட,

$$x^n f_n\left(m + \frac{c}{x}\right) + x^{n-1} f_{n-1}\left(m + \frac{c}{x}\right) + \dots = 0$$

கிடைக்கிறது.

ஒவ்வொரு உறுப்பையும் டெய்லரின் தேற்றத்தால் விரிவாக்க,

$$x^n [f_n (m)] + x^{n-1} [c \cdot f'_n (m) + f_{n-1} (m)]$$

$$+ x^{n-2} \left[\frac{c^2}{2!} f_n'' (m) + c \cdot f'_{n-1}(m) + f_{n-2} (m) \right]$$

$+ \ldots\ldots\ldots = 0$ கிடைக்கும்.

x^n-ன் மற்றும் x^{n-1}-ன் கெழுக்களைப் பூச்சியமாக்குவோம்.

$$\left.\begin{aligned} f_n (m) &= 0 \\ c \cdot f_n' (m) + f_{n-1} (m) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (6 \cdot 3)$$

இவைகளைத் தீர்த்தால், $m_1, m_2, \ldots\ldots m$, மற்றும் $c_1\ c_2 \ldots\ldots c_n$ என்ற மூலங்கள் கிடைக்கும்; எனவே அணுகுகோடுகள்,

$y = m_r x + c_r$ $(r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n)$ என்பவை.

$f_n (m)$ என்பது x^n-ஐ பெருக்கும் கோவையில் $y = m, x = 1$ என்று பொருத்தினால் கிடைக்கிறது. இதனை வகையிட $f'_n\ (m)$ கிடைக்கிறது. இது போலவே, x^{n-1}-ஐ பெருக்கும் கோவையில் $y = m, x = 1$, என்று பிரதியிட $f_{n-1} (m)$ கிடைக்கிறது. எனவே விதியைக் கீழ்க்கண்டவாறு விளக்கலாம்.

மிக அதிகப்படியையுடைய உறுப்புகளில் $x = 1$, $y = m$ என்று பிரதியிட்டு $f_n (m)$-ஐக் கண்டுபிடி; $f_n (m) = 0$ என்று வைத்து

மூலங்களைக் கணக்கிட்டு $c = -\dfrac{f_{n-1} (m)}{f'_n (m)}$ என்று கண்டுபிடி.

அப்பொழுது அணுகுகோடு $y = mx + c$ ஆகும்.

எ. கா. 3.

$4 (x^4 + y^4) - 17x^2y^2 - 4x (4y^2 - x^2) + 2 (x^2 - 2) = 0$ திற்கு அணுகுகோடுகளைக் கணக்கிடு. [M.Sc. '60]

சமன்பாடு நான்குப்படித்தானது ; நான்காம் படி உறுப்புகளில் $x = 1$, $y = m$ என்று பிரதியிட

$f_n(m) = 4(1 + m^4) - 17m^2$

மற்றும் மூன்றும்படி உறுப்புகளில் அவ்வாறே பிரதியிட

$f_{n-1}(m) = -4(4m^2 - 1)$

எனவே $4m^4 - 17m^2 + 4 = 0$-வின் மூலங்கள் முறையே

$m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2$

$f'_n(m) = 16m^3 - 34m$

எனவே $c = -\dfrac{-4(4m^2 - 1)}{16m^3 - 34m}$

$m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2$, என்னும்பொழுது முறையே c-ன் மதிப்புகள் 0, 0, 1, — 1.

ஆக அணுகுகோடுகள் : $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{1}{2}x$; $y = 2x + 1$; $y = 2x - 1$

5·3 சிறப்பு வகைகள் (Special Cases)

A. x^n அல்லது y^n—உறுப்புகள் இல்லாமலிருத்தல்

n-படித்தான வளைகோட்டிற்கு, மெய்யான அல்லது கற்பனையான அணுகுகோடுகளின் எண்ணிக்கை பொதுவாக n-ஆக இருக்கும் என்று முன்பே கூறப்பட்டது. இந்த விதிக்கு விலக்குகளை இப்பொழுது காண்போம்.

$y = mx + c$ என்று பிரதியிட்டால், x^n-ன் கெழுவானது n-படித்தான கோவையாயிருக்கும். y^n-என்ற உறுப்பே இல்லாவிடில், x^n-ன் கெழுவும் n-ஐவிட குறைந்த படித்தானதாகத்தான் இருக்கும். எனவே மூலங்கள் n-எண்ணிக்கைக்கும் குறைவாகவே இருக்கும். இதனையே நாம் வேறுவழியாக நோக்குவோம்.

x^n-ன் கெழுவில் m^n-உறுப்பு இருக்காது, அதாவது m^n-ன் கெழு = 0. எனவே அந்தச் சமன்பாட்டில் m ன் ஒரு மூலம் = கந்தழி. ஆதலால் அணுகுகோடு y-அச்சிற்கு இணையாக $x = a$ என்ற வடிவில் அமையும். [இதுபோலவே கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டில் x^n-ன் உறுப்புகள் இல்லாவிடில், அந்த வளைகோட்டிற்கு $y = b$ என்ற வடிவில் அணுகுகோடுகள் அமையும்].

எனவே வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில் x^n, y^n-உறுப்புகள் இல்லையென்றால், இரண்டு அச்சுகளுக்கும் இணையான அணுகுகோடுகள் உள்ளன என்று துணியலாம். இதனையே ஒரு விதியாகக் கீழே கூறியுள்ளது.

விதி 4

வளைகோட்டுச் சமன்பாட்டை x-ன் சமன்பாட்டாக (y-ன் சமன்பாட்டாகவும்) இறங்குவரிசையில் எழுது. உயர்ந்தபடி உறுப்புகளை பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க x, y இரு அச்சுகளுக்கும் இணையாக அணுகுகோடுகள் கிடைக்கும்.

எ. கா. 4.

$xy^2 = 4a^2(2a - x)$ என்ற வளைகோட்டில் இரு அச்சுகளுக்கு இணையான அணுகுகோடுகளைக் கண்டுபிடி.

சமன்பாடு மூன்றும் படித்தானது. ஆனால் x^3, x^2 உறுப்புகள் இல்லை. சமன்பாட்டை $x(y^2+4a^2)-8a^3=0$ என்று எழுதினால் x-உறுப்பின் கெழு $= y^2 + 4a^2$. இதனை பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க $y^2 + 4a^2 = 0$. அதாவது இரு மூலங்களும் கற்பனை மூலங்களே. எனவே, x-அச்சிற்கு இணையான **மெய்யான தொலைத்தொடு கோடுகள்** கிடையாது.

அதே சமன்பாட்டை, y-ஐக் கொண்டு இறங்கு வரிசையில் எழுதுவோம்.

$$y^2x - 4a^2(2a - x) = 0$$

இங்கு y^2-ன் கெழு $= x$. எனவே $x = 0$ என்பது அணுகுகோடு. முடிவாக இந்த வளைகோட்டிற்கு ஒரே ஒரு மெய்யான அணுகுகோடு உள்ளது.

குறிப்பு: ஒரு சமன்பாட்டிற்குக் கற்பனை மூலங்கள் எப்பொழுதும் இரட்டை, இரட்டையாகவே வரும். எனவே வளைகோட்டின் சமன்பாடு ஒற்றைப் படித்தானது. ஆனால், அணுகுகோடுகளின் எண்ணிக்கையும் ஒற்றை எண்ணாகும்; ஆகையால் அதற்கு ஒரு உண்மை அணுகு கோடாவது இருக்கவேண்டும்.

$B \cdot c f_n'(m) + f_{n-1}(m) = 0$ என்ற சமன்பாடு, m-ன் ஒரு மதிப்பிற்குச் சர்வசமன் ஆகிவிடுகிறது.

இப்பொழுது மேற்கண்ட சமன்பாட்டைக் கொண்டு c-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட முடியாது. அந்த வேளைகளில், அடுத்த கெழுவை (x^{n-2}-வின்) பூச்சியமாக்குவோம்.

அதாவது $\frac{c^2}{2} f''_n(m) + c \cdot f'_{n-1}(m) + f_{n-2}(m) = 0$.

இதிலிருந்து c_1, c_2 என்ற இரண்டு மூலங்கள் கிடைக்கும். எனவே; அணுகுகோடுகள் $y = mx + c_1$; $y = mx + c_2$ என்று வரும்.

இவை இரண்டு இணைகோடுகள் என்பதைக் கவனிக்க.

எ. கா. 5

$x^3 + 2x^2y + xy^2 - xy + 2 = 0$ என்பதற்கு இணையான அணுகுகோடுகள் உள்ளன என்று காட்டி அவைகளைக் கண்டுபிடி.

$$f_n(m) = 1 + 2m + m^2; \quad f_{n-1}(m) = -1 - m,$$
$$f_{n-2}(m) = 0; \quad f_{n-3}(m) = 2.$$

$f_n(m) = 0$ என்றால், $(m + 1)^2 = 0$ அல்லது $m = -1$, $m = -1$ இந்த மூலங்களில் $f_{n-1}(m) = 0$ மற்றும் $f'_n(m) = 2 + 2m = 0$

எனவே $c = -\frac{f_{n-1}(m)}{f_n'(m)}$ என்ற சமன்பாட்டினால் c-ஐக் கணக்கிட முடியாது. வலது பக்கக் கோவை தேருக் கோவை.

இப்பொழுது $\frac{c^2}{2} f_n''(m) + c \cdot f'_{n-1}(m) + f_{n-2}(m) = 0$ என்பதில் மதிப்புகளைப் பிரதியிட $\frac{c^2}{2}(2) + c(-1) + 0 = 0$ அல்லது

$c^2 - c = 0$ எனவே c-ன் மதிப்புகள் $c = 0$, $c = 1$

இரு இணை அணுகுகோடுகள்: $y = -x$; $y = -x + 1$ என்பவை. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு 3-படித்தானதால் மூன்று அணுகுகோடுகளும் மெய்யானவைகளாகும். மீதியுள்ள அணுகு கோடு y-அச்சிற்கு இணையாயிருக்கும். y^3-உறுப்பு இல்லாததால், y^2-ன் கெழுவான x-ஐ பூச்சியமாக்க, $x = 0$ என்ற மூன்றாவது அணுகுகோடு கிடைக்கும்.

குறிப்பு: $f_n(m) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு சமமான மூலங்கள் இருந்தால் அந்த மதிப்பிற்கு $f_n'(m) = 0$ என்று ஆகிவிடும். அப்பொழுது $f_{n-1}(m)$ என்பதும் பூச்சியமாயிருக்கும் நிலையைத் தான் மேலே பார்த்தோம். அப்படியில்லாமல்,

$f_n(m) = f'_n(m) = 0$ என்னும் பொழுது, $f_{n-1}(m) \neq 0$ ஆனல் c-ன் மதிப்பு ∞ (கந்தழி) ஆகிவிடும். அதாவது $y = mx + c$ என்ற கோட்டின் y-அச்சின் வெட்டுத்துண்டு (y-intercept) கந்தழியாவதால், அந்தக்கோடு முழுவதும் கந்தழியிலேயே இருக்கும். எனவே அதனைத் தொலைத்தொடுகோடாகக் கொள்ளக் கூடாது.

எடுத்துக் காட்டாக $y^2 - 4ax = 0$ என்ற பரவளையத்தை எடுத்துக் கொள்ளலாம். இங்கு $f_n(m) = m^2$; $f_{n-1}\, m = -4a$ எனவே $f_n(m) = 0$ என்பதற்கு $m = 0$; $m = 0$ என்ற இரு சமமான மூலங்கள் இருக்கின்றன. $c = -\dfrac{f_{n-1}(m)}{f'_n(m)} = \dfrac{+4a}{2m}$

$m = 0$ என்னும் பொழுது c-ன் மதிப்புக் கந்தழி. அதாவது பரவளையத்திற்குத் தொலைத்தொடுகோடு முழுவதும் **கந்தழியிலேயே** உள்ளது; மெய்யான தொடுகோடுகள் கிடையாது.

C. வளைகோட்டின் சமன்பாடு $(ax+by+c)\,F_{n-1} + P_{n-1} = 0$ என்ற வடிவத்தில் இருப்பது.

இங்கு F_{n-1}, P_{n-1} என்பவை, x, y-மாறிகளில் $(n-1)$ படியுள்ள கோவைகள்.

$ax + by + c = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையான ஏதாவதொரு கோட்டை எடுத்துக் கொண்டால், அதற்கும் கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டிற்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளி கந்தழி ஆகும். அவற்றுள், மற்றுமொரு புள்ளி கந்தழியிலிருக்க நாம் அதே திசையில், வளைகோட்டின் $\dfrac{P_{n-1}}{F_{n-1}}$ —ன் எல்லையைக் கணக்கிடுவோம்,

அதாவது, $\dfrac{x}{y} \to \dfrac{-b}{a}$ என்னும் பொழுது $Lim.\ \dfrac{P_{n-1}}{F_{n-1}} = l$ ஆனல்

$ax + by + c + l = 0$ என்பது அணுகுகோடு.

எ. கா. 6

$(x + y)(x^4 + y^4) = a(x^4 + a^4)$ என்பதன் அணுகுகோடுகளைக் கண்டுபிடி.

இங்கு $F_{n-1} = x^4 = y^4$; $\rho_{n-1} = -(x^4 + a^4)a$

நேர்கோடு $x + y = 0$ என்பது. எனவே $\text{Lim}\,\dfrac{x}{y} = -1$ என்னும் பொழுது $\dfrac{\rho_{n-1}}{F_{n-1}}$-ன் எல்லையை ($l$-ஐ) கணக்கிடவேண்டும்.

$$l = \lim \frac{\rho_{n-1}}{F_{n-1}} = \lim \frac{-(x^4 + a^4)\,a}{(x^4 + y^4)}$$

$x = -y$ என்னும் பொழுது, $l = -\lim \dfrac{-a(x^4 + a^4)}{2x^4}$

$x \to \infty$ ஆனால் $l = -a/2$

எனவே $x + y = \dfrac{a}{2}$ என்பதுதான் ஒரு அணுகுகோடு. மற்ற நான்கு அணுகு கோடுகளும் கற்பனையாவை. ஏனென்றால், விதி—1 வழியில் $f_n\ (m) = 1 + m + m^4 + m^4 = (m + 1)(1 + m^4) = 0$ என்பதற்கு ஒன்றுதான் மெய்யான மூலம், மற்ற நான்கும் கற்பனையானவை.

D. வளைகோட்டின் சமன்பாடு $(ax + by + c)^2\ F_{n-2} + \rho_{n-3} = 0$ என்றிருக்கும் பொழுது $ax + by + c = 0$ என்ற திசைக்கு இணையான இரு அணுகு கோடுகள் கிடைக்கும்; இங்கு

$\dfrac{x}{y} \to -\dfrac{b}{a}$ மற்றும் $x \to \infty$ என்னும்பொழுது

$$l = \sqrt{\text{Lt}\left(\frac{-\rho_{n-2}}{F_{n-2}}\right)} \quad \text{ஆனால்,}$$

$ax\,by + c \pm l = 0$ என்ற இரு கோடுகளும் இணைகோடுகளாகும்.

E. வளைகோட்டின் சமன்பாடு $F_n + F_{n-2} = 0$ என்றிருப்பது $F_n = 0$ என்பதனைத் தீர்க்கவும். ஆக n-ஒருபடிக்குறிய (linear) காரணிகளைக் கொண்டிருப்பின், அவைகளை பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க, n அணுகு கோடுகள் கிடைத்து விடும். ஆனால் இந்த முறையில் இணையான அனுகு கோடுகளைக் கண்டு பிடிக்க முடியாது.

எ. கா. 7.

$(2x - 3y + 1)^2 \quad (x + y) - 8x + 2y - 9 = 0$ என்பதன் அணுகு கோடுகளைக் கண்டுபிடி.

$$(2x - 3y + 1)^2 = \frac{8x - 2y + 9}{x + y}$$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ அல்லது $x = \frac{3}{2} y$

இதனைப் பொருத்தி, y-ஐ கந்தழிக்குச் செல்ல விடுவோம்.

$$(2x - 3y + 1)^2 = \lim_{y \to \infty} \frac{12y - 2y + 9}{\frac{3}{2} y + y} = 4$$

எனவே $2x - 3y + 1 = \pm 2$ என்பது இரு அணுகுகோடுகளைத் தரும்.

வளைகோடு மூன்று படித்தானது; எனவே மூன்ருவது அணுகுகோடும் மெய்யானதே. அது $x + y = 0$ என்பதை எளிதில் கணக்கிடலாம்.

எ. கா. 8

$y^2 \ (x^2 - a^2) + 2x^2 + 3x - 5y + 6 = 0$ என்பதன் அணுகுகோடுகள் என்ன ?

சமன்பாடு நான்கு படித்தானது. ஆனுல் இடது பக்கக் கோவையின் முதல் பகுதியான. $y^2 (x^2 - a^2)$ என்பது நான்கு படித்தானதாகவும், இரண்டாம் பகுதியான $2x^2 + 3x - 5y + 6$ என்பது இரண்டாம் படித்தானதாகவும் உள்ளன.

எனவே E-ஐக் கொண்டு $y^2 (x^2 - a^2) = 0$ என்று பொருத்த, $y = 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = -a$, என்ற நான்கு அணுகுகோடுகளும் கிடைத்துவிடுகின்றன. ஒரே அணுகுகோடு $[y = 0]$ இரு தடவைகள் வருகிறது,

F. **வளைகோட்டினை** $y = mx + c + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} \dots\dots\dots$ என்று

எழுத முடிந்தால் $y = mx + c$ என்பது அணுகுகோடு என்பது, வெளிப்படை.

G. **வளைகோட்டுச் சமன்பாடு** $y = \frac{Ax^n + (\text{கீழ்படி உறுப்புகள்})}{Bx^m + (\text{கீழ்படி உறுப்புகள்})}$

என்றிருந்தால்,

(i) $m = n$ ஆனால், x^n-என்பதினால் பகுதி தொகுதியிரண்டையும் வகுத்து $x \to \infty$ என்போம். அப்பொழுது $\text{Lim}\, y = \frac{A}{B}$.

எனவே $y = \frac{A}{B}$ என்பது அணுகுகோடு.

(ii) $m > n$ ஆனால், x^n-என்பதால், முன்போலவே பகுதி, தொகுதி இரண்டையும் வகுத்து, $x \to \infty$ என்று எல்லையிட்டால் $y = 0$ என்பது அணுகுகோடு.

(iii) $m < n$ ஆனால், **கிடையான** (horizontal) அணுகுகோடுகள் கிடையாது.

இதைப்போலவே, $x = \frac{A^1 y^n + (\text{கீழ்படி உறுப்புகள்})}{B^1 y^m + (\text{கீழ்படி உறுப்புகள்})}$ ஆனால் குத்தான (vertical) அணுகுகோடுகள் கிடைக்கும்.

5.4. அணுகுகோடுகள் வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள்

n-படித்தான வளைகோடு ஒன்றிற்கு n-அணுகுகோடுகள் இருக்கலாம்; அவைகளின் சமன்பாடுகளை ஒன்றோடொன்று பெருக்கினால் $F_n = 0$ என்று வருகிறது என்போம். அப்பொழுது வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை $F_n + F_{n-2} = 0$ என்று எழுதலாம்.

[பார்க்க 5. 3. E]. எனவே, அணுகுகோடுகள் மறுபடியும் வளை கோட்டை வெட்டும் இடங்களில் $F_{n-2} = 0$ என்றாகும். ஒவ்வொரு அணுகுகோட்டிற்கும் வளைகோட்டுடன் இரு கந்தழி வெட்டுப் புள்ளிகள் உள்ளதால், மற்றும் $(n - 2)$ வெட்டுப்புள்ளிகள் இருக்கலாம். எனவே n-அணுகுகோடுகளுக்கு $n\,(n - 2)$ வெட்டுப் புள்ளிகள். இவையெல்லாம் $F_{n-2} = 0$ என்று வளைகோட்டின் மேலே பொருந்தியிருக்கும்; இந்த வளைகோட்டின், படி $= n - 2$.

மூன்றும் படி வளைகோட்டுடன் அதன் அணுகுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டின் மேலே இருக்கும். நான்காம் படி சமன்பாட்டுடன் அதன் நான்கு அணுகுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள் பொதுவாக எட்டு ; அவைகள் ஒரு இருபடி வளைகோட்டின் மேல் பொருந்தியிருக்கும்.

எ. கா. 9

$2x^4 - 5x^2 y^2 + 3y^4 + 4x^3 - 6y^3 + x^2 + y^2 - 2xy + 1 = 0$ என்பதன் அணுகுகோடுகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகள் மறுபடியும் வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் $43x^2 + 122\,xy - 64y^2 - 84x + 96y - 31 = 0$ என்பதன் மேல் பொருந்தியிருக்கும் என்று காட்டு [M. Sc, 1963].

இங்கு $F_n\,(m) = 2 - 5m^2 + 3m^4$

$$f_{n-1}\,(m) = 4 - 6m^3$$

எனவே $2 - 5m^2 + 3m^4 = 0$ என்பதைத் தீர்க்க

$m = \pm 1,\ m = \pm \sqrt{2/3}$ என்று கிடைக்கின்றன.

$$C = -\frac{f_{n-1}\,(m)}{F'_n\,(m)} = \frac{6m^3 - 4}{12m^3 - 10m} = \frac{3m^3 - 2}{6m^3 - 5m}$$

முறையே c-ன் மதிப்புகள, $1,\ 5,\ \dfrac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}$,

$-\dfrac{(2\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}{(-4\sqrt{2} + 5\sqrt{2})}$ அதாவது $1,\ 5,\ (\sqrt{6} - 2),$

$(-\sqrt{6} - \sqrt{2})$

எனவே, அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$y = x + 1$; $y = - x + 5$; $y = + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, x + (\sqrt{6} + 2)$; $y = - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, x - (\sqrt{6} + 2)$. இவைகளை ஒன்றுடன் ஒன்று பெருக்கினால்,

$$(y - x - 1)(y + x - 5)(y - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, x - \sqrt{6} + 2)$$
$$(y + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, x + \sqrt{6} - 2) = 0$$

அதாவது $3y^4 + 2x^4 - 5x^2y^2 + 4x^3 - 6y^3 + 44x^2 + 120\,xy - 63y^2 - 84x + 96y - 30 = 0$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைகோடு சமன்பாட்டில், இதனைக் கழித்தால் அணுகுகோடுகள் வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் பொருந்தும் மற்றொரு வளைகோடு கிடைக்கும்.

அது $43x^2 + 122xy - 64y^2 - 31 = 0$ என்பதாகும்.

எ. கா. 10.

$3x^3 + 2x^2y - 7xy^2 + 2y^3 - 14xy + 7y^2 + 4x + 5y = 0$ என்பதன் அணுகுகோடுகள், அதே வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டின் மேலுள்ளன என்று காட்டி, அந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. [M. Sc. 1966]

$$f_n(m) = 3 + 2m - 7m^2 + 2m^3 = 0$$

என்றால் $(m - 1)(m - 3)(2m + 1) = 0$ அல்லது $m = 1$, $m = 3$, $m = - 1/2$

$$f_{n-1}(m) = - 14m + 7m^2.$$

எனவே $c = \dfrac{-f_{n-1}(m)}{f'_n(m)} = \dfrac{14m - 7m^2}{6m^2 - 14m + 2}$

முறையே $m = 1$, $m = 3$, $m = - 1/2$ என்று பிரதியிட

$c = - \frac{7}{6}, - \frac{3}{2}, - \frac{5}{6}$; எனவே அணுகுகோடுகள்

$$y = x - \frac{7}{6};\ y = 3x - \frac{35}{2};\ y = - \frac{x}{2} - \frac{5}{6}$$

அதாவது $6y - 6x + 7 = 0$; $2y - 6x + 3 = 0$; $6y + 3x + 5 = 0$ இவைகளைப் பெருக்கி எளிதாக்குவோம்.

$$108x^3 + 72x^2y - 252\,xy^2 + 72y^3 - 504xy + 252y^2 - 237x + 28y + 105 = 0,$$

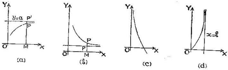
கொடுத்த சமன்பாட்டை 36 ஆல் பெருக்கி இதிலிருந்து கழிக்க,

$$-481x + 106y + 105 = 0$$

வெட்டும் புள்ளிகள் இந்த நேர்கோட்டின் மேலுள்ளன.

§ 5·5. அணுகுகோடும், வளைகோடும்

சில சமயங்களில் அணுகுகோடு வளைகோட்டின் மேற்புறமாகவும், சில சமயங்களில் அதன் கீழ்புறமாகவும் அதனைத் 'தொட' வரும். இதே போலவே, அணுகுகோடு வளைகோட்டின் இடது புறமாகவோ, வலது புறமாகவோ கூட இருக்கலாம். கீழ்கண்ட படங்களிலிருந்து இவைகளை நன்கு புரிந்து கொள்ளலாம்.



படம் 5·3

இந்தத் தன்மைகள் நன்கு தெரிந்தால், வளைகோட்டை வரைவதற்கு மிகவும் உதவியாயிருக்கும்.

P என்பது கந்தழிக்கருகிலுள்ள வளைகோட்டின் ஒரு புள்ளி; அதே x அச்சுக் கூறுள்ள அணுகு கோட்டிற்கான புள்ளி P' என்போம். [பார்க்க படம் 5·3 $(a) + (b)$]·

அணுகுகோடு வளைகோட்டிற்கு மேலிருந்தால் $P'P > 0$; கீழிருந்தால் $P'P < 0$.

வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை $y = ax + b + f\left(\frac{1}{x}\right)$

என்றால் $y = ax + b$ என்பது அணுகுகோடு;

$$P'P = (ax + b) - (ax + b + f\,1/x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} \dots \text{ என்போம்.}$$

$P'P$-ன் மதிப்பு $-\frac{p}{x}$-ஐ ஒட்டியிருக்கும். x-என்பது கந்த ழிக்குச் செல்வதால், $P'P$-ன் குறி, p-ன் குறியை ஒட்டியிருக்கும்.

படம் (a)-ல் $P'P > 0$. எனவே p, குறையெண்ணாக இருக்க வேண்டும்; படம் (b)-ல் $P' < 0$. எனவே p மிகை எண்ணாக வேண்டும்.

எனவே முடிவாகக் கூறின்—முதல் கால்வட்டத்தில் (quadrant) p குறை எண்ணானல், அணுகுகோடு மேலே இருக்கும்; p மிகை எண்ணானல் அணுகுகோடு கீழேயிருக்கும்.

இரண்டாம் கால்வட்டத்தில் (quadrant) x-என்பது குறையான தால், இங்கு அணுகுகோடு மேலே இருக்க, p மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும். கீழே இருக்க, p குறை எண்ணாக வேண்டும். இதே போலவே மற்ற காற்பகுதிகளுக்கும் கணக்கிடலாம்.

வளைகோட்டுச் சமன்பாட்டை $x = a'y + b' + F\left(\frac{1}{y}\right)$ என்று

எழுதுவதால், செங்குத்தான அணுகுகோடுகளுக்கு வளைகோடு வலப்புறமா, இடப்புறமா என்று கணக்கிட்டு விடலாம்.

[பார்க்க படம் 5. 3 (c) & (d)]

எ. கா. 11.

$$y = \frac{(x+4)\,(x-1)}{(x+1)\,(x-2)} \text{ என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகு}$$

கோடுகளைக் கண்டுபிடித்து, அவைகள் வளைகோட்டிற்கு எந்த பக்கங்களில் உள்ளன என்று காட்டு.

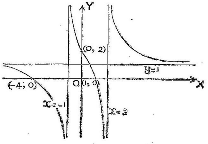
$x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$ என்பவை இரு செங்குத்தான அணுகு கோடுகள். மற்றும் வளைகோடு 3-படித்தானதால், மிஞ்சிய அணுகுகோடும் மெய்யானதே.

பகுதி, விகுதிகளை x^2-ஆல் வகுத்து, $x \longrightarrow \infty$ என்ற எல்லைக்குப்போனால்

$y = 1$ என்ற அணுகுகோடு கிடைக்கிறது.

$$y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 2} = 1 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} \cdots$$

எனவே $p = 4 > 0$. முதற்காற்பகுதியில் வளைகோடு அணுகுகோட்டிற்கு மேலும். இரண்டாம் காற்பகுதியில்வளைகோடு அணுகுகோட்டிற்குக் கீழேயும் இருக்கும். மூன்று அணுகு கோடுகளையும், மேற்கூறிய தன்மையையும் வைத்து, வளைகோட்டின் வரைபடத்தை தோராயமாக வரைவோம்.



படம் 5·4

இப்பொழுது $x = 2$ என்ற அணுகுகோட்டிற்கு வளைகோடு எவ்வாறு அமைந்துள்ளது என்பதை ஆராய்வோம்.

$$y = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$$

முதற்காற்பகுதியில் $x > 0$; $x > 2$ என்ற மதிப்புகளை வைத்தால் y-ன் குறி $\frac{(+)(+)}{(+)(+)} > 0$. எனவே $x > 2$ என்ற பகுதியில் y-ன் மதிப்பும் > 0 ஆகும்.

இதுபோலவே $x < 0 < 2$ என்றால் $y = \frac{(+)(+)}{(+)(-)} < 0$. எனவே இந்தப் பகுதியில் $y < 0$, வளைகோடு x-அச்சிற்குக் கீழே இருக்கும். $-1 < x < 0$ ஆயின் $y = \frac{(+)(-)}{(+)(-)} > 0$ எனவே, வளைகோடு x-அச்சின் கீழேயே இருக்கும்.

$x < -1$ ஆனால் $y = \frac{(+)(-)}{(-)(-)} < 0$. எனவே வளைகோடு x-அச்சின் கீழேயே இருக்கும்.

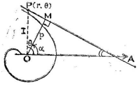
$y = 0$, என்னும் பொழுது $x = -4$, அல்லது $x = 1$. எனவே வளைகோடு, x-அச்சை இந்த இருபுள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

அதுபோலவே $x = 0$, ஆனால் $y = \frac{(4)(-1)}{(1)(-2)} = 2$ ஆகும்.

எனவே, வளைகோடு $(0, 2)$ என்ற புள்ளியினூடேயும் செல்கிறது.

இந்தப் பண்புகளையெல்லாம் மனதில்வைத்து, மேற்கண்ட வரைபடம் வரையப்பட்டுள்ளது.

§ 5·6. போலார் கூறுகளில் அணுகுகோடுகளைக் கணக்கிடுதல் :



படம் 5·5

அணுகுகோட்டிற்கு $r \to \infty$ என்றாக வேண்டும் $PM\theta$ என்பது வளைகோட்டின் ஒரு அணுகுகோடு, Q என்ற குத்துக்கோட்டை அணுகுகோட்டிற்கு வரைந்து அதன் நீளத்தை p என்போம்.

அப்பொழுது $\sin \angle POM = \frac{p}{r}$ அல்லது $p = r \sin P\hat{O}M$

$$= \sin(\theta - \alpha)$$

அதாவது $p = r \sin (\theta - \alpha)$ என்பது அணுகுகோடாக வேண்டுமானால், $r \to \infty$ என்றாகவேண்டும், அல்லது $u = \frac{1}{r}$ என்றால் $u \to 0$.

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் சமன்பாட்டைக் கீழ்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$u^n f_0(\theta) + fu^{n-1} f_1(\theta) \dots\dots + u \cdot f_{n-1}(\theta) + f_n(\theta) = 0$$

$u = 0$ என்றால் $f(\theta) = 0$ இந்த சமன்பாட்டைத் தீர்த்தால் $\theta = \alpha$ என்ற மூலம் வரும். அந்த மூலத்துக்கொப்பான அணுகுகோடு $p = \sin(\theta - \alpha)$ என்பதாகும்.

இப்பொழுது p-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்; p-என்பது போலார் தொடுகோட்டடி என்பது தெளிவு.

எனவே $r = \frac{1}{u}$ என்றால்,

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta}$$

எனவே, தொடுகோட்டடி $p = \frac{r^2}{dr/d\theta} = -\frac{d\theta}{du}$

இங்கு $u \to 0$ என்னும் முடிவில் p-ஐ கணக்கிடவேண்டும்.

$$p = \lim_{u \to 0}\left(-\frac{d\theta}{du}\right)$$

எனவே விதியை இப்பொழுது சுருங்கக் கூறலாம்.

விதி :

வளைகோட்டு சமன்பாட்டில் $u = \frac{1}{r}$ என்று பிரதியிட்டு, அதனை

$$u^n \cdot f_0(\theta) + u^{n-1} \cdot f_1(\theta) + \dots + u f_{n-1}(\theta) + f_n(\theta) = 0 \quad (A)$$

என்று எழுது பிறகு $f_n(\theta) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை தீர்த்து $\theta = \alpha$ என்ற மூலத்தைக் கண்டுபிடி; மற்றும் $\frac{d\theta}{du}$-ஐ கணக்கிட்டு அதன் எல்லையை $u \to 0$ என்னும்பொழுது கண்டுபிடி. அது p ஆகட்டும். அப்பொழுது அணுகுகோட்டின் சமன்பாடு

$$p = r \sin(\theta - \alpha) \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு :

(A) சமன்பாட்டை u-மாறியால் வகையிட

$$\left[n u^{n-1} f_0(\theta) + u^n f_0'(\theta) \cdot \frac{d\theta}{du}\right] + \dots \left[u \cdot f'_{n-1}(\theta) \frac{d\theta}{du} + f_{n-1}(\theta)\right] + f'_n(\theta) \frac{d\theta}{du} = 0 \quad (B)$$

இங்கு $u \to 0$ என்று பிரதியிட

$$f_{n-1}(\theta) + f_n'(\theta) \frac{d\theta}{du} = 0 \quad (C)$$

என்றுவரும். எனவே

$$p = \left(\frac{d\theta}{du}\right)_{u=0} = -\frac{f_{n-1}(\theta)}{f'_n(\theta)} \quad (D)$$

இவ்வாறும் $\frac{d\theta}{du}$ ன் எல்லையைக் கணக்கிடலாம்.

எ. கா. 12.

$r = a \tan\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகுகோடுகள் எவை?

$r = \frac{1}{u}$ என்று வைத்தால்

$\frac{1}{u} = a \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ அல்லது $u\,(a \sin \theta) - \cos \theta = 0$

அதாவது $f_{n-1}(\theta) = a \sin \theta$; $f_n(\theta) = -\cos \theta$

எனவே $f_n(\theta) = 0$ என்று பிரதியிட்டால்

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ அல்லது } -\frac{\pi}{2}$$

$$p = \left(\frac{d\theta}{du}\right)_{u=0} = -\frac{a \sin \theta}{\pm \sin \theta} = -a$$

எனவே அணுகுகோடுகள், $p = r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

$$-a = r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \text{ அல்லது } -a = r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

அதாவது $r \cos \theta = \pm a$

எ. கா. 13

$r \sin 2\theta = a \cos 3\theta$

$r = \frac{1}{u}$ என்று பிரதியிட்டு எளிதாக்க :

$(a \cos 3\theta)\, u - \sin 2\theta = 0$

அல்லது $f_n(\theta) = -\sin 2\theta$; $f_{n-1}(\theta) = a \cos 3\theta$

$\sin 2\theta = 0$ என்றால் $2 \sin \theta \cos \theta = 0$ அல்லது

$\theta = 0$ அல்லது $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$p = -\frac{f_{n-1}(\theta)}{f_n{}^1(\theta)} = +\frac{a \cos 3\theta}{2 \cos 2\theta}$$

$\theta = 0$ என்னும் பொழுது $p = \dfrac{a}{2}$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ என்னும் பொழுது $p = 0$

எனவே அணுகுகோடுகள் $\dfrac{a}{2} = \sin\theta$

மற்றும் $\theta = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$

அல்லது $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ என்பவை.

§ 5.7 வளைகோட்டு வடிவுடைய அணுகுகோடுகள் (வளை கோட்டணுகி (Curvilinear Asymptotes)

இதுவரையில் அணுகுகோடுகளை நேர்கோடுகளாக மட்டுமே கருதி வந்தோம். ஒரு நேர்கோடு ஒரு வளைகோட்டை அணுகுவது போலவே, இரண்டு வளைகோடுகள் ஒன்றையொன்று அணு கலாம். அப்பொழுது, இரண்டில் எது குறைந்த படியுடையதோ அதனை மற்றதன் வளைகோட்டணுகி என்போம்.

இரண்டிற்கும்பொதுவான xகூற்றுகளிருக்கும் பொழுது,அவை களின் y-கூற்றுகளின் வித்தியாசம், x-என்பது கந்தழிக்கு செல்லுங் கால், பூச்சியமாக வேண்டும். அல்லது பொதுவான y-கூற்றுகள் இருப்பின், $y \to \infty$ ஆகும் பொழுது, அவ்விரண்டு வளைகோடு களின் x-கூற்றுகளின் வித்தியாசம் பூச்சியமாக வேண்டும்.

எடுத்துக் காட்டாக

$$x = ly^2 + my + n + \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \dots$$

$$x = ly^2 + my + n$$

என்ற இரு வளைகோடுகளில், இரண்டாவது முதல்வளை கோட்டின் 'வளைகோட்டணுகி' ஆகிறது. அதாவது முதல் வளை கோட்டிற்கு ஒரு "பரவளைய அணுகி" ($x = ly^2 + my + n$ என்பது) உள்ளது எனலாம்.

எ. கா. 14

$x^2 y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஒரு பரவளைய அணுகி உள்ளது என்று காட்டு; அதன் உச்சி என்ன ?

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டை

$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ என்று எழுதலாம்.

எனவே $y = x^2 + x + 1$ என்பதுதான் பரவளைய அணுகி.

இதனை $y - \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ என்று எழுதினால்

உச்சி $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ என்றாகிறது.

பயிற்சி

1. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ என்பதனை அணுகுகோடுகளுக்கு ஆராயவும்.

கீழ்கண்ட வளைகோடுகளுக்கு அணுகுகோடுகள் எவை ?

2. $x^2 (x - y) + ay^2 = 0$
3. $xy + y + 2x - 2 = 0$
4. $y^3 = x^3 + ax^2$
5. $x^3 + y^3 - 3x^2 = 0$
6. $y = \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 3}$
7. $y^2 = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 9}$
8. $y = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$
9. $y = \frac{x^2 - 5x + 10}{x - 3}$

10. $y = \dfrac{2x^3 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$

11. $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 1}$

12. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x}$

13. $y = \dfrac{(x - 2)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x + 1)^2}$

14. $y^2 = \dfrac{(x^2 - 4)(x + 1)}{x^2 - 9}$

15. $2x^4 - 5x^2y^2 + 3y^4 + 4x^3 - 6y^3 + x^2 + y^2 - 2xy + 1 = 0$ (M. Sc. 1963)

16. $x + 4y + 2y^2 - x^2y + y^3 = 0$

17. $2x^3 - x^2y + 2xy^2 + y^3 - 4x^2 + 8xy - 4x + 1 = 0$

18. $x^3 + 2x^2y - 4xy^2 - 8y^2 - 4x + 8y - 1 = 0$

19. $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + 2x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y + 1 = 0$

20. $y^3 - x^2y + 2y^2 + 4y + x = 0$

21. $2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 + 2x^2 + xy - y^2 + x + y + 1 = 0$

22. இரு அச்சுகளுக்கும் இணையான அணுகுகோடுகளைக் கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குக் கண்டுபிடி.

(a) $xy^3 + x^3y = a^4$ (b) $x^2y^2 = i^2(x^2 + y^2)$

(c) $y^2x - a^2(x - a) = 0$ (d) $\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{b^2}{y^2} = 1$

(e) $x^4 + y^4 = a(x^2 - y^2)$

(f) $x^2(y^2 + x^2) = a^2(x^2 - y^2)$

(g) $y^3 + x^2 y + 2xy^2 - y + 1 = 0$

(h) $y (y - 1)^2 - x^2 y = 1$

(i) $(y - a)^2 (x^2 - a^2) = x^4 + a^4$

(j) $y^2 = x^4/(a^2 - x^2)$

(k) $xy^2 + 4y = x^3 + x^2 - x + 5$

(l) $x^2 y = x^3 + x + y$

(m) $x^2 (x + y) (x - y)^2 + ax^3 (x - y) - a^2 y^3 = 0$ (M.Sc. 1965)

(n) $xy (x^2 - y^2) + (x - y) (x^2 - y^2) + 2y^2 (x - 1) = 0$

(o) $x^3 y^2 (x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2$

(p) $y^2 x^2 = (x^2 - a^2)$

(q) $y^2 = (x - a) (x - b) (x - c)$

கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்கு அணுகுகோடுகளைக் கண்டுபிடி.

23. $(x + y) (x^2 - xy + y^2) - 3\, axy = 0$

24. $xy (x + y) = a (x^2 - a^2)$

25. $(y^2 + xy - 2x^2)^2 + (y^2 + xy - 2x^2) (2y + x)$
$- 7y^2 - 19xy + 28x^2 + x + 2y + 3 = 0$

26. $(x + y)^2 (x + 2y + 2) = x + 9y - 2$

27. $(x^2 - y^2) (x + 2y) + 5 (x^2 + y^2) + x + y = 0$

28. $y^3 - xy^2 - 2x^2 y + 2x^3 - 7xy + 3y^2 + 2x^2 + 2x$
$+ 2y + 1 = 0$ (M.Sc. 68)

29. $3x^3 + 2x^2 y - 7xy^2 + 2y^3 - 14xy + 7y^2 + 4x$
$+ 5y = 0$ (M.Sc. 66)

30. $(y-x)^2 x - 3y(y-x) + 2x = 0$

31. $y^2 = x^2 (x+a) / (x-a)$

32. $x^2 y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0$ என்ற வளை கோடும், அதன் அணுகுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள் $x + y = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் மேலுள்ளன என்று காட்டு.

33. $x^2(y^2 - x^2) - x^2 y + a^2 (y^2 + x^2 + y) = 0$ என்ற வளைகோடும், அதன் அணுகுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள் $4a^2 > 1$ என்றால் ஒரு நீள்வட்டத்தின் மேலும், $4a^2 < 1$ என்றால் ஒரு அதிபரவளையத்தின் மேலும் உள்ளன என்று காட்டு; $4a^2 = 1$ என்றால் என்னவாகும்? (M.Sc. 64)

34. $x^3 - 6x^2 y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$ என்கிற வளைகோட்டிற்கு உள்ள அணுகுகோடுகளுடைய, மற்றும் (0, 1), (1, 0), (0, 0) என்ற மூன்று புள்ளிகளுடே செல்கிற மூன்றும் படி வளைகோட்டைக் கண்டுபிடி. (M.Sc. 67)

[குறிப்பு: அணுகுகோடுகள் $(x-y) = 0$, $(x-2y) = 0$, $x - 3y = 0$; எனவே வேண்டப்பட்ட வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை $(x-y)(x-2y)(x-3y) + Ax + By + C = 0$ என்று எடுத்துக் கொள்]

35. $xy(x^2 - y^2) + (x-y)(x^2 - y^2) + 2y^2(x-1) = 0$ என்ற வளைகோடு அதன் அணுகுகோடுகளுடன் வெட்டும் புள்ளிகள் $x^2 - y^2 - xy + x + y - 1 = 0$ என்கிற அதிபரவளைகோட்டின் மேலுள்ளன என்று காட்டு (M.Sc. 62)

36. $3x^3 + 2x^2 y - 7xy^2 + 2y^3 - 14xy + 7y^2 + 4x + 5y = 0$ என்கிற வளைகோடும், அதன் அணுகுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள் எந்த நேர்கோட்டின் மேலுள்ளன?

37. ஒரு நான்காம் படி வளைகோடு (a, b) புள்ளியினூடே செல்கிறது; $x = 0$, $x = y$ என்பவை அதன் தொலைத்தொடு கோடுகள்; மற்றும் அது தன் அணுகுகோடுகளை $x^2 + y^2 = a^2$ என்கிற வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அதன் சமன்பாடு என்ன?

38. $x^3 - xy^2 - 2xy + 2x - y = 0$ என்கிற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் அதனை மறுபடியும் வெட்டும்

புள்ளிகள் $3x - y = 0$ என்கிற நேர்கோட்டின் மேல் பொருந்தியிருக்கும் எனக் காட்டு.

39. $(x^2 - 4y^2)(x^2 - 9y^2) + 5x^2y - 5xy^2 - 30y^3 + xy + 7y^2 - 1 = 0$ என்கிற வளைகோட்டை அதன் அணுகுகோடுகள் மறுபடியும் வெட்டும் புள்ளிகள் எந்த வளைகோட்டின் மேல் பொருந்தும் ?

40. $4(x^4 + y^4) - 17x^2y^2 - 4x(4y^2 - x^2) + 2(x^2 - 2) = 0$ என்ற வளைகோட்டை அதன் அணுகு கோடுகள் மறுபடியும் வெட்டும் புள்ளிகள் $x^2 + 4y^2 = 4$ என்ற வளைகோட்டின் மேல் பொருந்தும் எனக்காட்டு.

41. கீழ்கண்ட வளைகோடு, அவைகளின் அணுகுகோடுகளுக்கு எவ்வாறு உள்ளன ?

(i) $y^2(x^2 - a^2) = x^2(x^2 - 4a^2)$

(ii) $(y - x)^2 \cdot x - 3y(y - x) + 2x = 0$

(iii) $y^2(x - a) = x^2(x + a)$

(iv) $y^2 = \dfrac{x(x - a)(x - 2a)}{x + 3a}$

(v) $x^2 - 2xy + 2x + 4y - 4 = 0$

(vi) $y^2(x^2 - y^2) - 2ay^3 + 2a^3x = 0$

(vii) $y^4 - x^4 + xy = 0$

42. $(y - x + a/4)^2 = ax + 5a^2/16$ என்பது $(y - x)^2(y - x) = 2ax^2$ என்றவளைகோட்டின் வளைகோட்டணுகி என்றும், $y + x = a/2$ அதன் அணுகுகோடு என்றும் காட்டு.

43. $x^2y = x^3 + x^2 + x + 1$ என்ற வளைகோட்டிற்கு பரவளைய அணுகி ஒன்று இருக்கிறதென்றும் அதன் மையவகற்சி (Eccentricity) $\dfrac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ என்றும் காட்டு.

44. ஒரு வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை கீழ்வருமாறு எழுதுவோம்:

$$x^n \phi_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}\cdot\phi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots = 0. \quad \phi_n(\mu) = 0,$$

$$\phi'_n(\mu_1) = 0; \; \phi_{n-1}(\mu_1) = 0. \quad \phi'_{n-1}(\mu_1) = 0.$$

ஆனால் இணையான இரு தொலைத்தொடுகோடுகள் அந்த வளை கோட்டிற்கு உள்ளன என்றும், அவைகள் ஆதியிலிருந்து சம தூரத்தில் இருப்பவை என்றும் அவைகளின் சமன்பாடுகள்

$y = \mu_1 x \pm \sqrt{\dfrac{-2\phi_{n-2}(\mu_1)}{\phi_n''(u_1)}}$ என்றும் காட்டு.

45. $y = x\cdot f(x)$ என்னும் வளைகோட்டிற்கு $y = x\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \left[\frac{d}{dx}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{x=0}$ என்பது அணுகுகோடு என்று காட்டு.

$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$ என்பதற்கு இந்த வழியில் அணுகு கோட்டைக் கண்டுபிடி.

46. $4a = r(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)$, $4a = -r(\sqrt{3}\sin\theta + 3\cos\theta)$ என்பவை $r\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right) = a$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகு கோடுகள் என்று காட்டு.

47. $r\tan n\theta = a$ என்பதன் எல்லா அணுகுகோடுகளும் $r = \dfrac{a}{n}$ என்ற வட்டத்தைத் தொடுகின்றன (touch) என்று காட்டு.

48. அணுகுகோடுகளைக் கண்டுபிடி :—

(i) $r\theta = a$, (ii) $r = a\,\mathrm{cosec}\,\theta + 6$

(iii) $r\sin n\theta = a$ (iv) $r^n \sin n\theta = a^n$

(v) $r = a + b\cot n\theta$ (vi) $r\theta\cos\theta = ae^{\theta}$

(vii) $r = a(\sec\theta + \cos\theta)$ (viii) $r^2 = \dfrac{a^2\cos 2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$

(ix) $r^2\cos\theta = a^2\sin 3\theta$ (x) $r(\pi + \theta) = ae^{\theta}$

(xi) $r\log\theta = a$.

விடைகள்

1. $x + y + a = 0$
2. $x - y + a = 0$
3. $x = 0, y = 0$
4. $3(y - x) = a$
5. $x + y = 1$
6. $x = 1, x = 3, y = 4$
7. $x = \pm 3, y = +1$
8. $y = 0, x = 1, x = 2$
9. $x = 3$
10. $y = 2,$
11. $x = 1$
12. $x = 0, x = -2, y = 1$
13. $x = -1, x = 1, y = 1$
14. $x = \pm 3, y = \pm 1$
15. $y = \pm \frac{1}{2} x ; y = \pm (2x + 1)$
16. $y = 0, y = x - 1, y + x + 1 = 0$
17. $y + x = 2, y = x + 2, y - 2x + 4 = 0$
18. $y = -\frac{1}{2} x + 1 ; y = -\frac{1}{2} x - 1, y = \frac{1}{2} x$
19. $y + x = 1, y = x + \frac{(3 \pm \sqrt{5})}{2}$
20. $y = 0, y = x - 1, y + x + 1 = 0$
21. $y = x + 1 ; y = -x ; y = 2x$
22. (*a*) $y = 0, x = \pm a,$ (*b*) $x = 0, y = 0$

(*c*) $x = 0, y = \pm a,$ (*d*) $x = \pm a, y = \pm b$

(*e*) அணுகுகோடுகள் இல்லை, (*f*) அணுகுகோடுகள் இல்லை.

(*g*) $y = 0,$ (*h*) $y = 0,$ (*i*) $x = \pm a,$ (*j*) $x = \pm a$

(*k*) $x = 0$ (*l*) $x = \pm 1,$ (*m*) $x = \pm a$

(*n*) $y = -1, x = 1,$ (*o*) $x = \pm 1, y = \pm 1$

(*p*) இல்லை, (*q*) $y = \pm 1$

23. $x + y + a = 0$
24. $x = 0, y = a, x + y + a = 0$

25. $y + 2x + 2 = 0$, $y + 2x - 1 = 0$, $y - x + 3 = 0$ $y - x - 2 = 0$.

26. $x + 2y + 2 = 0$; $x + y = \pm 2\sqrt{2}$

27. $3(y - x) = 5$; $y + x = 5$, $6y + 3x = 25$

30. $x = 3$, $y = x + 1$, $y = x + 2$

31. $y = x + a$, $y = -x - a$, $x = a$

36. $481x - 106y - 105 = 0$

37. $bxy(x^2 - y^2) = a(a^2 - b^2)(x^2 + y^2 - a^2)$

39. $x^2 + y^2 = 1$

41. (i) $y = x$-க்கு கீழேயும்; $y = -x$-க்கு மேலேயும் வளைகோடுள்ளது.

(ii) முதல் காற்பகுதியில் $x=3$-க்கு வலப்புறம்; $y = x + 2$-க்கு மேற்புறம்; நான்காம்காற்பகுதியில் $x = 3$-க்கு இடப்பக்கம்; $y = x + 1$-க்கு கீழே; மூன்றும் காற்பகுதியில் $y = x + 1$ மற்றும் $y = x + 2$-களுக்கிடையே.

(iii) முதல், நான்காம் காற்பகுதிகளில் $x = a$-க்கு வலப் பக்கம்

$y = x + a$-க்கு எப்பொழுதும் மேலே;

$y = -x - a$-க்கு எப்பொழுதும் கீழே;

(iv) $x > 0$ ஆனால், வளைகோடு $y = x - 3a$, அணுகுகோட்டிற்கு மேலேயும், $x < 0$ ஆனால் கீழேயும்; $x > 0$ என்னும் பொழுது $y = -x + 3a$ என்ற அணுகுகோட்டிற்கு கீழே

$x < 0$ ஆனால் அதன் மேலே; $x = -3a$

அணுகுகோட்டிற்கு எப்பொழுதும் இடப்பக்கம்.

(v) $x > 0$ என்னும் பொழுது $x = 2$-க்கு வலப்புறமும்,

$y = \frac{1}{2}x + 2$-க்கு மேலேயும்; $x < 0$ ஆனால்

$x = 2$-க்கு இடப்பக்கமும்; $y = \frac{1}{2}x + 2$-க்கு கீழேயும்

(vi) $y = 0$, $x - y - a = 0$.

(vii) $y = \pm x$; $y = x$ அணுகுகோட்டின் மேல் மூன்றும் காற்பகுதியிலும், கீழே முதற்காற்பகுதியிலும் வளைகோடு உள்ளது;

மற்றும் இரண்டாம் கால்பகுதியில் அணுகுகோடு கீழேயும், நான்காம் கால்பகுதியில் வளைகோடு கீழேயும் உள்ளது.

48. (i) $r \sin \theta = a$, (ii) $r \sin \theta = a$

(iii) $r \sin \theta \left(\theta - \frac{k\pi}{a}\right) = a \sec k\pi$ [k ஒரு முழு எண்].

(iv) $k\pi = n\theta$ (v) $r \sin \left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{b}{n}$

(vi) $r \sin \theta = a$; $r \cos \theta = 2ae^{(2n+1)2/\pi} / (2n+1)\pi$

(vii) $r \cos \theta = a$ (viii) இல்லை (ix) $\theta = \pi/2$

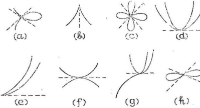
(x) $y e^{\pi} + a = 0$ (xi) $a = r \sin (\theta - 1)$

6. சிறப்புப் புள்ளிகள்

(SINGULAR POINTS)

§ 6.1. வரையறைகள்

சாதாரணமாக ஒரு வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை $y = f(x)$ என்று எழுதுகிறோம். இதில் x-மாறிக்கு ஏதாவதொரு மதிப்புக் கொடுத்தால் y-ன் மதிப்பிற்கு ஒரே ஒரு விடைதான் கிடைக்கும். எடுத்துக்காட்டாக $y = 3(x + 7)$ அல்லது $y = \sin(5x^2 - 2x + 6)$ என்பவைகளைக் காட்டலாம். இவைகள் தனிப்பெருமான சார்புகள் (single Valued functions) எனப்படும். எனவே, கொடுக்கப் பட்ட ஒரு (x, y) புள்ளியில் வளைகோட்டின் ஒரே ஒரு கிளைதான் செல்லும். அப்படியில்லாமல், குறித்த ஒரு புள்ளியில் பல கிளைகள் இருப்பின் அத்தகைய புள்ளிகளைச் சிறப்புப் புள்ளிகள் அல்லது மடங்குப் புள்ளிகள் (Multiple Points) என்போம். அத்தகைய புள்ளிகளில் சார்புக்கு ஒரு சிறப்புத்தன்மை (Singularity) உள்ளது என்போம். ஒரு குறிப்பிட்ட x-மதிப்பிற்குப் பல y-மதிப்புகளோ. அல்லது குறிப்பிட்ட ஒரு y-மதிப்பிற்குப்பல x-மதிப்புகளோ பொருத்தமாயிருக்கும். கீழேயுள்ள சில வரை படங்கள் இந்தக் கருத்துகளைத் தெளிவாக்கும்.



படம் 6·1

(a)-ல் ஒரு புள்ளியில் இருகிளைகள் செல்கின்றன. ஒவ்வொரு கிளைக்கும் குறித்த புள்ளியில் தனித்தனியாக தொடுகோடுகளை வரையலாம் என்பது நோக்கற்பாலது. (c)-ல் ஒரே புள்ளியில் நான்கு கிளைகள் உள்ளன. (d), (e) களில் இரு கிளைகள் செல்லுகின்றன; ஆனால் அந்தப் புள்ளியில் இரு கிளைகளுக்கும் தொடுகோடு ஒன்றேதான் (f), (g), மற்றும் (h)-என்கிற வரைபடங்களில் மாறுபட்ட சிறப்புத் தன்மைகள் உள்ளன.

6·2. இரட்டைப் புள்ளிகள்

ஒரு குறித்த புள்ளியினூடே இருகிளைகள் சென்றால் அத்தகைய புள்ளியை இரட்டைப் புள்ளி (Double Point) என்கிறோம். அத்தகைய புள்ளியில் இரு கிளைகளுக்கும்

(i) தனித்தனி தொடுகோடுகள் இருப்பின், அதனை கணு (Node) என அழைக்கிறோம்.

படம் 6·1 (a), (c)

(ii) ஒரே ஒரு தொடுகோடானால், அதனைக் கூர் அல்லது பிறைமுனை (cusp) என அழைக்கிறோம்.

படம். 6·1 (b) (d), (e) (f) (g)

(iii) தொடுகோடுகள் கற்பனையானவையானால், அத்தகைய புள்ளியிலிருந்து கிளைகள் கிளம்பாது. புள்ளி 'தனித்து' நிற்கும். அத்தகைய புள்ளிகளைத் துணையியப் புள்ளிகள் (conjugate Poin.s) அல்லது தனிமைப் புள்ளிகள் என அழைக்கிறோம்.

எனவே இரட்டைப் புள்ளிகளை வகைப்படுத்த அந்தப் புள்ளிகளிலுள்ள தொடுகோடுகளை ஆராயவேண்டுமாதலால் அடுத்த பகுதியில் தொடுகோடுகளைக்கணக்கிடுவதை விரிவாகக்கூறுவோம்.

6.3. ஆதியில் பல தொடுகோடுகளைக் காணல்

முதலில் ஆதியிலுள்ள தொடுகோடுகளைக் கணக்கிடும் முறையை ஆராய்வோம்.

கீழே (A)-ல் ஒரு n-படித்தான வளைகோட்டின் சமன்பாடு உள்ளது. இந்த வளைகோடு ஆதியினூடே செல்கிறது. உறுப்புகள் எல்லாம் ஒழுங்காக அடைப்புகளுக்குள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு அடைப்பிற்குள்ளும் இருக்கும் உறுப்புகள் ஒரே படித்தானவை (Same degree).

$$(a_1 x + a_2 y) + (b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 xy) + (c_1 x^3 + c_2 y^3 + c_3 x^2 y + c_4 xy^2) + \dots\dots + (\quad) + = 0 \qquad (A)$$

$P(x,y)$ என்பது இந்த வளைகோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. O-என்பது ஆதி. OP-ன் சாய்வு விகிதம் $= \frac{y}{x}$. P-என்பது வளைகோட்டின் மேலேயே O-ஐ நெருங்கினல், OP என்ற நாண், வளைகோட்டின் தொடுகோடாகும்.

(A)-ஐ x-ஆல் வகுத்து $\frac{y}{x} = m$ என்று பிரதியிடுவோம்.
$(a_1 + a_2 m) + (b_1 x + b_2 y \cdot m + b_3 y) + \ldots\ldots = 0$ இப்பொழுது $x \to 0$ என்ருல்,

$$a_1 + a_2 m = 0 \text{ எனவே, } m = \frac{-a_1}{a_2} ; \quad (a_2 \neq 0)$$

எனவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$a_1 x + a_2 y = 0 \qquad (B)$$

அதாவது, முதல் படித்தான உறுப்புகளை பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்கினுல், கிடைக்கும் சமன்பாடு ஆதியில் தொடுகோட்டைக் குறிப்பிடும். (64)

இப்பொழுது இந்தப் பொதுவிதிக்கு விலக்குகளை நோக்குவோம்.

(i) $a_2 = 0$ ஆனுல் $a_1 \neq 0$

இந்த நிலையில் நாம் சாய்வு விகிதத்தை x-அச்சிற்குக் கணக்கிடாமல், y-அச்சிற்குக் கணக்கிட்டாம், சாய்வு விகிதம் $= -\frac{a_2}{a_1}$.
அல்லது தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $a_1 x + a_2 y = 0$ என்று முன்போலவே வரும்; $a_2 = 0$ ஆனதால் $x = 0$ என்பது தான் தொடுகோடு.

(ii) a_1, a_2 இரண்டுமே பூச்சியம்

அப்பொழுது வளைகோட்டின் சமன்பாடு (A)-கீழ்கண்டவாறு ஆகும்.

$$(b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 xy) + (c_1 x^3 + c_2 y^3 + c_3 x^2 y + c_4 xy^2) + \ldots\ldots = 0 \qquad (C)$$

x^2-ஆல் வகுத்து, $\frac{y}{x} = m$ என்று பிரதியிட்டால்

$$(b_1 + b_2 m^2 + b_3 m) + (c_1 x + c_2 y \cdot m^2 + c_3 y + c_4 ym) + \ldots\ldots = 0$$

இங்கு $x \to 0$ என்று கொண்டால்

$$b_1 + b_2m^2 + b_3m = 0 \qquad (D)$$

என்ற சமன்பாடு வரும். அதாவது தொடுகோட்டின் சாய்வு m ஆதலால், m-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் கிடைக்கும். இரண்டுமே தொடுகோடுகள் தாம். ஆக, $a_1 = a_2 = 0$ ஆனால், தொடுகோடுகள் இரண்டு என்று பொதுவாகக் கூறலாம். $b_1 + b_2m^2 + b_3m = 0$ விற்கு இரு கற்பனை மூலங்கள் இருப்பின் இரண்டு தொடுகோடுகளும் கற்பனை ஆகின்றன. அதாவது, ஆதியானது துணையியப் புள்ளியாகும்.

D-சமன்பாட்டிற்கு இரு சமமான மூலங்கள் இருப்பின் இரு தொடுகோடுகளும் ஒன்றுகிவிடுவதால், ஆதியானது ஒரு கூர், அல்லது பிறைமுனைப்புள்ளியாகும்.

D-சமன்பாட்டிற்கு இரு தனித்தனியான மெய் மூலங்கள் இருப்பின், இரு மெய்யான தொடுகோடுகள் இருக்கும்; எனவே ஆதி ஒரு 'கணுப்' புள்ளியாகும்.

எனவே முதல்படி உறுப்புகள் எல்லாம் பூச்சியமாகி விட்டால், இரண்டாம் படி உறுப்புகளை பூச்சியத்திற்குச்சமமாக்கினுல், வரும் சமன்பாடுதான் ஆதியில் உள்ள இரு தொடுகோடுகளின் சேர்வு (combined) சமன்பாடு ஆகும்.

இது போலவே, r-படி உறுப்புகள் மிகவும் கீழ்படி உறுப்புகள் ஆயின், ஆதி அந்த வளைகோட்டிற்கு ஒரு r-மடங்கு புள்ளியாகும். அவைகளையெல்லாம் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்கினுல் வரும் சமன்பாடு, r-தொடுகோடுகளின் சேர்வு சமன்பாடாகும்; அதற்கு மெய்யான மூலங்கள் எவ்வளவு உள்ளனவோ அவ்வளவு மெய்யான தொடுகோடுகள் வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் இருக்கும்.

எ. கா. 1

(i) $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2\,xy$ (ii) $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$

(iii) $x^3 + x^2y + x^2 - 5xy + 7y^2 = 0$. வளைகோட்டிற்கு ஆதி எத்தகைய புள்ளி என்று கண்டுபிடி. ஆதியில் தொடுகோடுகளைக் கண்டுபிடி.

(i) இங்கு, முதல்படி உறுப்புகளே இல்லை; இரண்டாம் படி உறுப்பு ஒன்றே ஒன்றுதான்: $4a^2xy$. அதனைப் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க, $x = 0$, $y = 0$, என்ற இரு மெய்யான மூலங்கள் கிடைக்.

கின்றன. எனவே, ஆதி ஒரு **கணுப் புள்ளி**; தொடுகோடுகள் $x = 0$, $y = 0$

(ii) இங்கு இரண்டாம் படி உறுப்புகளே மிகவுப் கீழ்படி உறுப்புகள். எனவே $-x^2 + 2xy - y^2 = 0$ என்றால் $(x - y)^2 = 0$ அல்லது ஒரே ஒரு தொடுகோடுதான், $x - y = 0$. ஆதி ஒரு கூர் அல்லது முனைப்புள்ளி. தொடுகோடு $x = y$ என்பது.

(iii) இரண்டாம்படி உறுப்புகளை பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க $x^2 - 5xy + 7y^2 = 0$ இந்த சமன்பாட்டிற்கு இருமூலங்களும் கற்பனையானவை. எனவே, இந்த வளைகோட்டிற்கு ஆதி ஒரு துணையியப்புள்ளி. தொடுகோடுகள் கற்பனையானவை.

(A)-ல் $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ என்று ஆனால், ஆதி ஒரு மூன்று மடங்குப் புள்ளி(Triple point)ஆகும். அப்பொழுது ஆதியிலுள்ள தொடுகோடுகளைக் கண்டுபிடிக்க மூன்றும்படி உறுப்புகளைப் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க வேண்டும்.

$$c_1 x^3 + c_2 y^3 + c_3 x^2 y + c_4 xy^2 = 0 \qquad (E)$$

பொதுவாக, மூன்று தொடுகோடுகள் (கற்பனை அல்லது மெய்யானவை) கிடைக்கும்

எனவே, ஒரு வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் தொடுகோடு அல்லது தொடுகோடுகளைக் **கண்டுபிடிக்க—அதன் சமன்பாட்டில் மிகக் குறைவான படியுள்ள உறுப்புகளைப் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க வேண்டும்.** (65)

எ. கா. 2.

$(x^2 + y^2)^3 = a^2 (x^2 - y^2)^2$ என்பது 6-படித்தான வளைகோடு. இதில் மிகக்குறைவான படியுள்ள உறுப்புகள் $(x^2 - y^2)^2$ ஆகும். எனவே ஆதியிலுள்ள தொடுகோடுகள் $(x^2 - y^2)^2 = 0$ அல்லது $x = y$, $x = -y$. இங்கு நான்கு தொடுகோடுகள் இரண்டிரண்டாகச் சமமானவை.

6·4 ஏதாவதொரு புள்ளியில் பல தொடுகோடுகளைக் காணல்

ஆதியைக் குறிப்பிட்ட புள்ளிக்கு மாற்றி, 6·2 ல் உள்ளதைப் போல் செய்ய வேண்டும். அதாவது குறித்த புள்ளி (h, k) ஆனால் $x = X + h$, $y = Y + k$, என்று பிரதியிட வேண்டும். வரும் சமன்பாட்டில் மாறிலியே இருக்காது.

எ. கா. 3.

$x^4 - x^3 - 4y^3 + 16x^2 + 12y^2 - 16 = 0$ என்பதற்கு (4, 2) என்ற புள்ளியில் தொடுகோடுகளைக் கண்டுபிடி.

ஆதியை (4, 2) க்கு மாற்ற வேண்டும்.

$x = X + 4,\ y = Y + 4$ என்று பிரதியிடுவோம்.

$$(X + 4)^4 - 8(X + 4)^3 - 4(Y + 2)^3 + 16(X + 4)^2$$
$$+ 12(Y + 2)^2 - 16 = X^4 + 8X^3 - 4Y^3 - 12Y^2 = 0$$

இங்கு குறைந்த படித்தான உறுப்பு $12Y^2$ மட்டும்தான். இதனை பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க $Y = 0$ என்ற இருபொருந்தும் மூலங்கள் (Coincident roots) கிடைக்கின்றன. எனவே, இந்த வடிவத்தில் ஆதியில் தொடுகோடுகள் $Y^2 = 0$ அல்லது $Y = 0$ என்ற ஒன்றுதான்.

முதல் வடிவத்தில் தொடுகோடுகள் கிடைக்க, மறுபடியும் ஆதிக்கே மாற்ற $y - 2 = 0$ என்பதுதான் தொடுகோடு. தொடுகோடு ஒன்றே ஆதலால், (4, 2) என்ற புள்ளி ஒரு கூர்புள்ளி.

6·5 ஒரு புள்ளி மடங்குப் புள்ளியாயிருக்க விதிகள்

$f(x, y) = 0$ என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு, இதனை இருமுறை வகையிடுவோம்.

$$f_x + f_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

$$f_{xx} + f_{xy}\frac{dy}{dx} + f_y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left[f_{yy}\frac{dy}{dx} + f_{yx}\right] = 0 \tag{2}$$

$$\text{அல்லது } f_{xx} + 2f_{xy}\frac{dy}{dx} + f_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f_y\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{3}$$

மடங்குப் புள்ளியில் (1) ல் $\frac{dy}{dx}$ க்கு ஒன்றைவிட அதிகமான மதிப்புகள் கிடைக்கவேண்டும். எனவே $f_x = f_y = 0$ என்று ஆக்கவேண்டும். அதாவது **எந்த புள்ளிகளில** $f = f_x = f_y = 0$ **ஆகிறதோ, அவற்றில் மட்டும்தான் மடங்குப் புள்ளிகள் இருக்க முடியும்.** (66)

(2)-ல் இந்த மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$f_{xx} + 2f_{xy}\left(\frac{dy}{dx}\right) + f_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad (4)$$

இந்த சமன்பாட்டிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ க்கு இருமுடிவுகள் கிடைத்தால் புள்ளி, இரட்டைப் புள்ளியாகும்.

வகைகள் :

(*A*) சமன்பாடு (4)-க்கு இருமூலங்களும் மெய்யாகவும், வெவ்வேறாகவும் இருந்தால், புள்ளி ஒருகணுப்புள்ளியாகும்.

எனவே கணுப் புள்ளிக்கு $f^2_{xy} > f_{xx} \cdot f_{yy}$ (67 *A*)

(*B*) சமன்பாடு (4)-க்கு இருமூலங்கள் சமமாக இருப்பின் புள்ளி ஒரு கூர்புள்ளியாகும்.

எனவே கூர்புள்ளிக்கு $f^2_{xy} = f_{xx} \cdot f_{yy}$ (67 *B*)

(*C*) சமன்பாடு (4)-க்கு இருமூலங்களும் கற்பனையானவைகளானால், புள்ளி ஒரு துணையியப் புள்ளியாகும்.

எனவே, துணையியப்புள்ளிக்கு $f^2_{xy} < f_{xx} \cdot f_{yy}$ (67 *C*)

(*D*) சமன்பாடு (4)-ல் $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$ ஆயின் புள்ளியின் சிறப்புத்தன்மை அதிக மடங்கானது (singularity of a higher order). புள்ளி மூன்றும் மடங்கு (Triple point) புள்ளியாகவோ, அல்லது 4, 5 — ம் மடங்கு புள்ளியாகவோ இருக்கலாம்.

சாதாரணமாக நாம் இரட்டைப் புள்ளிகளையேதான் வகையிடுவோம்.

எ. கா. 4.

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு இரட்டைப் புள்ளிகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளின் வகைகளையும் கூறு.

(i) $y^2 = (x-1)(x-2)(x-3)$

(ii) $y^2(4-x) = x(3-x)^2$

(iii) $(x+y+1)^2 - (1-x)^5 = 0$

(iv) $x^3 + y^3 - 12x - 27y + 70 = 0$

(i) $f(x, y) = y^2 - (x-1)(x-2)(x-3)$

$$= y^3 - x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = 0$$

$f_x = -3x^2 + 12x - 11; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{xx} = -6x + 12$

$f_y = 2_y; \quad f_{yy} = 2$

இரட்டைப் புள்ளிகளுக்கு $f_x = f_y = f = 0$ ஆகவேண்டும்.

$f_x = 0$ என்ருல் $3x^2 - 12x + 11 = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$f_y = 0$ என்ருல் $y = 0$

அதாவது $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ அல்லது $\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ என்பவை இரட்டைப் புள்ளிகளாக இருக்கலாம்.— அவைகள் கொடுக்கப் பட்ட வளைகோட்டின் மேல் இருந்தால்.

$y^2 - (x-1)(x-2)(x-3)$-ல் இந்த மதிப்புகளைப் பொருத்திஞல் மதிப்பு பூச்சியமாவதில்லை. எனவே இந்தப் புள்ளிகள், வளைகோட்டில் பொருந்துவதில்லை ; **வளைகோட்டிற்கு இரட்டைப்புள்ளிகள் இல்லை.**

(ii) $f(x, y) = y^2(4 - x) - x(3 - x)^2$

$$= 4y^2 - xy^2 - 9x + 6x^2 - x^3 = 0$$

$$f_x = -y^2 - 9 + 12x - 3x^2;$$

$$f_{xy} = -2y; \quad f_{xx} = 12 - 6x$$

$$f_y = +8y - 2xy; \quad f_{yy} = 8 - 2x$$

$f_x = 0 = f_y$ என்ருல்

$2y(4 - x) = 0; \quad -y^2 - 9 + 12x - 3x^2 = 0$

அதாவது $y = 0$ அல்லது $x = 4$. இரண்டாம் சமன்பாட்டில் $y = 0$ என்று பிரதியிட $-9 + 12x - 3x^2 = -3(3 - 4x + x^2) = 0$

அல்லது $(x-3)(x-1) = 0, \quad x = 1, \; x = 3$

$x = 4$ என்று பிரதியிட

$-y^2 - 9 + 48 - 48 = 0$; $y^2 + 9 = 0$; கற்பனை மூலங்கள் தான். எனவே இரட்டைப்புள்ளிகள் $(1, 0)$ அல்லது $(3, 0)$ என்பவையாக இருக்கலாம்—இவைகள் வளைகோட்டின் மேல் பொருத்திஞல், $-f = y^2(4 - x) - x(3 - x)^2$-ல் $(1, 0)$ என்று பொருத்திஞல் $f = 0$ ஆவதில்லை. எனவே $(1, 0)$ வளைகோட்டின்

மேல் இல்லை. ஆனால் (3, 0) வளைகோட்டின் மேலுள்ளது. ஆக, இரட்டைப்புள்ளி (3, 0) என்ற ஒன்றுதான்.

(3, 0) ல். f_{xx}, f_{yy}, f_{yx} களின் மதிப்புகளைக் கண்டு 67—A, 67—B, 67—C களின் உதவியால் இந்த இரட்டைப் புள்ளியை வகையிடுவோம்.

$$f_{xx} = -6 ; \quad f_{yy} = 2$$
$$f_{xy} = 0$$
$$f^2_{xy} = 0 ; \quad f_{xx} \cdot f_{yy} = -12$$

எனவே $f^2_{xy} > f_{xx} \cdot f_{yy}$

இரட்டைப்புள்ளி கணுப்புள்ளி. இருமெய்யான தொடுகோடுகள் வளைகோட்டிற்கு (3, 0)-ல் உள்ளன.

(iii) $f(x, y) = (x + y + 1)^2 - (1 - x)^5 = 0$

$f_x = 2(x + y + 1) + 5(1 - x)^4 ; \quad f_{xy} = 2 ;$

$f_{xx} = 2 - 20(1 - x)$

$f_y = 2(x + y + 1) \qquad f_{yy} = 2.$

$f_x = f_y = 0$ என்றால் $x + y + 1 = 0; \quad x = 1$ அதாவது $y = -2$; $(1, -2)$ என்பது வளைகோட்டின் மேலுள்ளது என்று எளிதில் காணலாம். எனவே அது ஒரு இரட்டைப்புள்ளி.

$(1, -2)$ ல், $f_{xx} = 2; \quad f_{xy} = 2, \quad f_{yy} = 2$

$f^2_{xy} = 4 \qquad f_{xx} f_{yy} = 4$

ஆக $f^2_{xy} = f_{xx} \cdot f_{yy}$ (67 — B) படிக்கு $(1, -2)$ என்பது ஒரு கூர்புள்ளி.

(iv) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 27y + 70 = 0$

$f_x = 3x^2 - 12 ; \quad f_{xx} = 6x ; \quad f_{xy} = 0$

$f_y = 3y^2 - 27 ; \quad f_{yy} = 6y$

$f_x = f_y = 0$ என்றால் $x = \pm 2, \quad y = \pm 3.$

அதாவது நான்கு புள்ளிகளை $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(-2, 3)$, $(-2, -3)$ $f(x, y)$-ல் பொருத்திப் பார்க்கவேண்டும்.

$(2, 3)$ பொருந்துகிறது. எனவே இது இரட்டைப் புள்ளி.

$(2, -3)$, $(-2, 3)$ $(-2, -3)$ மூன்றும் பொருந்துவதில்லை. $(2, 3)$ புள்ளியில், $f_{xx} = 12 ; \quad f_{xy} = 0 \cdot \quad f_{yy} = 18$

எனவே $f^2_{xy} = 0. \quad f_{xx} \cdot f_{yy} = 216$

அதாவது $f^2_{xy} < f_{xx} \cdot f_{yy}$

(67 — c) என்ற விதியின்படி, (2, 3) வளைகோட்டின் துணையியப்புள்ளி; இது ஒரு தனித்த புள்ளியாகும். இதனிடையே வளைகோட்டின் பகுதிகள் கிடையாது.

6·6. கூர்புள்ளிகளின் வகைகள்.

கூர் புள்ளிகளில் தொடுகோடுகள் இரண்டும் ஒன்றாகப் பொருந்தி விடுகின்றன. ஆனால், அவைகளில் பலவகைகள்



ஒற்றைக்கூர்-முதல் வகை
(Single cusp-First species)

(i)



ஒற்றைக்கூர்-இரண்டாம் வகை
(Single cusp-Second species)

(j)



இரட்டைக்கூர்-முதல் வகை
(Double cusp-First species)

(k)



இரட்டைக்கூர்-இரண்டாம் வகை
(Double cusp-Second species)

(l)



இரட்டைக்கூர்-வகைமாற்றம்
(Oscu-inflexion)

(m)

இருக்கக்கூடும். படம் 6·1. (b), 6·1 (f)-களில் தொடுகோட்டின் இரண்டு புறங்களிலும் வளைகோடு செல்வதைப் பார்க்கிறோம். இவைகளை முதல்வகைக் கூர்கள் (Cusps of the first species) என்று கூறுவோம்.

படம் 6·1. (d) மற்றும் (e) களில், வளைகோட்டின் இரண்டு பிரிவுகளும், தொடுகோட்டின் ஒரே புறத்தில் இருக்கின்றன என்பதைக் காண்கிறோம். இத்தகைய கூர்களை இரண்டாம் வகை (second species) கூர்கள் அல்லது பிறை முனை என்போம்.

தொடுகோடுகளைக் கொண்டுக்கூர்புள்ளிகளை வகைப் படுத்துவது ஒரு வழி. இப்பொழுது செங்கோட்டிற்கு (Normal) வளை கோட்டின் இரு பிரிவுகள் எவ்வாறு உள்ளன என்பதை வைத்து, வேறு வகைகளாகப் பிரிப்போம். 6.1. (b) மற்றும் (e)-ல் இரு பிரிவு களும், செங்கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் இருக்கின்றன. ஆனல் 6·1 (f) மற்றும் (d)-களில், செங்கோட்டின் இரண்டு பக்கங்களிலும் வளைகோட்டின் இரு பிரிவுகள் உள்ளன.

செங்கோட்டின் ஒரே பக்கம் வளைகோட்டின் பிரிவுகள் இருப் பின் அதனை "ஒற்றைக் கூர்" (single cusp), என்றும், இருபக்கங் களிலும் இருப்பின் இரட்டைக் கூர் (Double cusp) என்றும் வகைப் படுத்துவோம்.

எனவே 6·1 (i)-ல் முதல் வகை, ஒற்றைக் கூர்
6·1 (j)-ல் இரண்டாம் வகை, ஒற்றைக் கூர்
6·1 (l)-ல் இரண்டாம் வகை, இரட்டைக் கூர்
6·1 (k)-ல் முதல்கை, இரட்டைக் கூர்

படம் 6·1 (m)-ல் சிறப்புத்தன்மை சிறிது வேறு வடிவத்தில் உள்ளது. புள்ளி கூர்புள்ளியாகவும், வளைவு மாற்றுப் புள்ளி யாகவும் ஒருங்கே இருப்பதைப் பார்க்கலாம். எனவேதான், தொடு கோட்டின் இருபுறமும் வளைகோடு செல்வதைக் காண்கிறோம். அதேபோலவே, செங்கோட்டின் இருபுறமும் கூட வளைகோட்டின் பிரிவுகள் உள்ளன. அத்தகைய புள்ளியை "கொஞ்சு வளைவு மாற்றுப் புள்ளி" (point of Oscu-inflexion) என்கிறோம்.

இதனல், கூர்புள்ளிகளை ஐந்து வகையாகப் பிரித்ததாக ஆகிறது.

6·7. கூர்புள்ளிகளின் வகைகளைக் காண விதிகள்.

கூர்புள்ளியில் (x_1, y_1) தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். பிறகு $(x_1 + h)$-ல் (h-என்பது மிகச் சிறிய எண்) y-கூறுகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்; அவைகளில்

ஒன்று y_1-ஐ விட அதிகமாகவும் மற்றொன்று குறைவாகவும் இருப்பின், வளைகோட்டின் இருபிரிவுகளும் தொடுகோட்டின் இரு பிரிவுகளும் தொடுகோட்டின் இரண்டு பக்கங்களில் இருக்கும். எனவே, கூர் முதல் வகையைச் சேர்ந்தது.

$(x_1 + h)$-க்குப் பொருத்தமான y-ன் இரு மதிப்புகளும், y_1-ஐ விட அதிகமாகவோ [அல்லது இரண்டும் குறைவாகவோ] இருப்பின், இருபிரிவுகளும், தொடுகோட்டின் ஒரே பக்கத்தில்தான் இருக்கும். எனவே, கூர் இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்தது.

தொடுகோடு y-அச்சிற்கு இணையானால், மேற்கூறிய வழி பயன்படாது; அப்பொழுது y_1-மதிப்பைச் சமமாக வைத்து, அதற்கான x-கூறுகளின் மதிப்பைக் கண்டு வகைப்படுத்தலாம்.

இதே முறையை கூர் செங்கோட்டை வைத்தும் பயன்படுத்தி, ஒற்றை அல்லது இரட்டைக் கூர்களை வகைபடுத்தலாம்.

எ. கா. 5.

$y^2 = 2x^2y + x^3y + x^3$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் முதல் வகையைச் சேர்ந்த ஒற்றைக் கூர் உள்ளது என்று காட்டு.

[M. Sc. ' 60]

வளைகோடு நான்கு படித்தானது.

$$f(x, y) = x^3y + x^3 + 2x^2y - y^2 = 0$$

இரண்டாம்படி உறுப்புகளைப் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க, $y^2 = 0$ அல்லது இருகோடுகளும், ஒன்றோடொன்று பொருந்துகின்றன. எனவே $(0, 0)$-என்பது ஒரு கூர்புள்ளி, $y = 0$ என்பது கூர் தொடுகோடு; $x = 0$ என்பது கூர் செங்கோடு.

சமன்பாட்டை y-ன் இருபடிச் சமன்பாடாக்கி, மூலங்களைக் காண்போம்.

$$y^2 - y(2x^2 + x^3) - x^3 = 0$$

$$y = \frac{(2x^2 + x^3) \pm \sqrt{(2x^2 + x^3)^2 + 4x^3}}{2}$$

கூர்புள்ளி $(0, 0)$ ஆதலால் $y = x_1 + h = h$ ஆகும். எனவே

$$y = \frac{(2h^2 + h^3) \pm \sqrt{(2h^2 + h^3)^2 + 4h^3}}{2}$$

மூலக்குறியின் (under the radical sign) அடியிலுள்ளக் கோவை $(2h^2 + h^3)$-ஐ விட அதிகம். எனவே, y-ன் மதிப்புகள், ஒன்று மிகையாகவும், மற்றொன்று குறைவாகவும் இருக்கும், அதாவது கூர் முதல் வகையைச் சேர்ந்தது.

$x = 0$ என்பது கூர்செங்கோடு, எனவே x-வைத்து மூலங்கள் கணக்கிடமுடியாது. x-ன் மதிப்பு இந்த செங்கோட்டின் ஒரு புறத்தில் மிகையாகவும், மறு புறத்தில் குறையாகவும் இருக்கும். $x=h$ என்போம், இப்பொழுது h-மிகையாக இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். ஆனால் h-குறைவானால், மூலக்குறியின் அடியிலுள்ள கோவையும் குறையாகும். ஏனென்றால்.

$(2h^2 + h^3)^2 + 4h^3 = 4h^4 + 4h^5 + h^6 + 4h^3 = h^3 \, (4 + 4h + 4h^2 + h^3)$; $h \to 0$ என்னும் பொழுது இதன் எல்லை $\to 4h^3 < 0$. எனவே மூலங்கள் கற்பனையானவை; அதாவது y-அச்சின் இடது புறம் வளைகோட்டுப்பிரிவு இருக்கவே முடியாது. செங்கோடான $x = 0$-ன் வலது புறத்திலேதான் வளைகோட்டின் இருபிரிவுகளும் உள்ளன. ஆக கூர் ஒற்றைக் கூர்தான்.

எ. கா. 6.

$y^2 = 2x^2y + x^4y + x^4$-ன் கூர்புள்ளியைக் கண்டுபிடித்து அதனை வகைப்படுத்து.

$$f(x, y) = x^4y + x^4 + 2x^2y - y^2 = 0$$

கூர் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $y = 0$, எனவே செங்கோடு $x = 0$ ஆகிறது.

$$y^2 - y\,(x^4 + 2x^2) + x^4 = 0$$

$$y = \frac{x^4 + 2x^2 \pm \sqrt{(x^4 + 2x^3)^2 - 4x^4}}{2}$$

$$= \frac{(x^4 + 2x^2) \pm x^3\sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

$$= \frac{x^2\,(x^2 + 2) \pm x^3\sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

x (அல்லது $x = h$) சிறிய எண்ணுதலால், y-க்கு இரு மதிப்புகள் : ஒன்று குறை; ஒன்று மிகை கிடைக்கும். எனவே கூர் முதல் வகையைச் சார்ந்தது.

செங்கோடு y-அச்சுதான். x-என்பது குறை எண் ஆனாலும், மிகை எண்ணானாலும் $\sqrt{x^2+2}$-க்கு ஒரே மதிப்புதான். எனவே y-க்கு இரு மூலங்கள் கிடைக்கும். ஆக கூர் இரட்டைக் கூர்தான்.

எ. கா. 7

$(y-4x^2)^2 = x^7$-ன் கூர் புள்ளியை வகைப்படுத்து.

$f(x, y) = -x^7 + 16x^4 - 8x^2y + y^2 = 0$

எனவே $y=0$ கூர் தொடுகோடு ; $x=0$ கூர் செங்கோடு.

y-ன் மூலங்கள் $y = 4x^2 \pm x^{7/2}$

இங்கு இரு மூலங்கள் கிடைக்கும். ஆனால் இரண்டுமே மிகையாக உள்ளன. [x-சிறிய எண் ஆனால், $x^{7/2}$ என்பது x^2-ஐ விடச் சிறியதாக இருக்கும்]. எனவே கூர் இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்தது.

x-க்கு மிகச் சிறிய குறை மதிப்புகளை தந்தால் $x^{7/2}$ என்பது கற்பனை எண்ணாகி விடுகிறது. எனவே ஆதி ஒற்றைக் கூர்புள்ளி.

ஆக $(0, 0)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் இரண்டாம் வகை ஒற்றைப்புள்ளி (படம். 5.1.e)- போல்.

எ. கா. 8

$x^6 - x^4y - x^2y + y^2 = 0$ வளைகோட்டின் கூர்களை ஆராய்க.

$f(x, y) = x^6 - x^4y - x^2y + y^2 = 0$

எனவே $y=0$ என்பது கூர்தொடுகோடு. $x=0$ என்பது கூர் செங்கோடு.

$$y = \frac{(x^2+x^4) \pm \sqrt{(x^2+x^4)^2 - 4x^6}}{2}$$

மூலக்குறியின் கீழுள்ள கோவையின் மதிப்பு (x^2+x^4)-ஐ விடச் சிறியது. எனவே (எ. கா. 7-ல் போல்) கூர் இரண்டாம் வகை.

மற்றும், x-குறை எண் ஆனாலும், மிகை எண் ஆனாலும், y-ன் மதிப்பு மாறுது, எனவே கூர் இரட்டைக் கூர்.

எ. கா. 9.

$x^5 + 16x^2y - 64y^2 = 0$. வளைகோட்டைச் சிறப்புப் புள்ளிகளுக்காக ஆராய்க.

$$f(x, y) = x^5 + 16x^2y - 64y^2 = 0$$

$$f_x = 5x^4 + 32xy \qquad f_{xx} = 20x^3 + 32y$$

$$f_{xy} = 32x. \qquad f_y = 16x^2 - 128y \qquad f_{yy} = -128.$$

$f_x = 0 = f_y$ என்றால் $x = 0, y = 0$ என்ற ஒரே மதிப்புதான் வருகிறது. எனவே $(0, 0)$ ஒன்று தான் சிறப்புப் புள்ளி.

அந்தப் புள்ளியில் :

$$f_{xx} = 0, \qquad f_{xy} = 0, \qquad f_{yy} = -128$$

எனவே $f^2_{xy} = f_{xx} \cdot f_{yy}$

$(0, 0)$ என்பது கூர்புள்ளி.

y-ன் மூலங்களைக் கண்டுபிடிக்க

$$y = \frac{16x \pm \sqrt{(16x^2)^2 + 256^5}}{128}$$

x-சிறிய எண் ஆனால், y-க்கு இரு மதிப்புகள் கிடைக்கும், ஒன்று குறை எண். மற்றொன்று மிகை எண். எனவே கூர் முதல் வகையைச் சார்ந்தது. தொடுகோட்டின் இருபுறமும் வளைகோடு செல்கிறது.

$$y = \frac{16x^2 \pm 16x^2\sqrt{1 + x}}{128}$$

x-மிகச்சிறியஎண் ஆனால்.

$$y = \frac{1}{8}\left[x^2 \pm x^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right]$$ என்று எழுதலாம்.

ஆக $y = \frac{1}{8}\left(2x^2 + \frac{x^3}{2}\right)$ அல்லது $y = -\frac{x^3}{2}$ என்ற இரு மூலங்கள் கிடைக்கின்றன.

$x < 0$ ஆனால் y-மிகை எண்தான்.

$x > 0$ ஆனாலும், y-ன் மதிப்புகளில் ஒன்று மிகையாகவும். மற்றொன்று—குறையாகவும் இருக்கும். எனவே செங்கோட்டின் இருபுறமும் வளைகோடு செல்கிறது; ஆயின் ஒற்றைக் கூரா, இரட்டைக்கூரா என்று வகைப்படுத்த முடியவில்லை.

இப்பொழுது $(0, 0)$ வளைவு மாற்றப் புள்ளியாக இருக்குமா என்று ஆராய்வோம். அதற்கு விதி

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகவேண்டும்.

குறித்த சமன்பாட்டை, x-ஆல் வகையிட

$$5x^4 + 16x^2 \frac{dy}{dx} + 32xy - 128y \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(i)}$$

இதில் $x = 0$, $y = 0$ என்று பிரதியிட, $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்புகள் கிடைப்பதில்லை.

மறுபடியும் x-ஆல் வகையிட

$$20x^3 + 16x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(32x) + 32x \frac{dy}{dx}$$
$$+ 32y - 128y \frac{d^2y}{dx^2} - 128 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

அதாவது,

$$20x^3 + 32y + \frac{dy}{dx}(64x) - 128 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+ \frac{d^2y}{dx^2}(16x^2 - 128y) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

இங்கு $x = 0 = y$ என்று பிரதியிட, $128 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

அல்லது $\frac{dy}{dx} = 0$ என்று வருகிறது. அதாவது ஆதியில் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= 0$. எனவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y = 0$ [இதனை முன்பே கண்டோம்!]

(i)-ஐ மறுபடியும் x-ஆல் வகையிட

$$60x^2 + 32\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}(64) + 64x\frac{d^2y}{dx^2} - 256\ \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$+ \frac{d^2y}{dx^2}\left[32x - 128\frac{dy}{dx}\right] + (16x^2 - 128y)\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right] = 0$$

இங்கு $x = 0 = y = \dfrac{dy}{dx}$ என்று பிரதியிட $0 = 0$ என்று வருகிறது. இதனைச் சற்று எளிதாக்கிப் பிறகு x-ஆல் வகையிடுவோம்.

$$60x^2 + 96\ \frac{dy}{dx} + 96x\frac{d^2y}{dx^2} - 384\ \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy^2}{dx^2}$$

$$+ (16x^2 - 128y)\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right] = 0 \qquad \text{(iii)}$$

வகையிட

$$120x + 96\ \frac{d^2y}{dx^2} + \left\{ x, y, \text{ அல்லது } \frac{dy}{dx}\text{-களைக் கொண்ட கோவை} \right\} = 0 \qquad \text{(iv)}$$

இங்கும் $x = 0 = y = \dfrac{dy}{dx}$ என்று பிரதியிட, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

என்று வருகிறது.

எனவே (0, 0)-ல் $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆதலால், அது ஒரு வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும். [படம் 5 . 1 (h)-ஐப்போல்]

எ. கா. 10.

$x^5 + y^5 = 5a^2x^2y^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் இரண்டு கூர்கள் உள்ளன என்று காட்டு. [M.Sc. 1967]

$F(x,y) = x^5 + y^5 - 5a^2x^2y^2 = 0$

$F_x = 5x^4 - 10a^2xy^2$; $F_{xx} = 20x^3 - 10a^2y^2$;

$F_{xy} = -20a^2xy$

$$F_y = 5y^4 - 10\,a^2\,x^2 y. \qquad F_{yy} = 20y^3 - 10a^2x^2$$

$F_x = 0 = F_y$ என்பதனைத் தீர்க்க, $x = 0$, $y = 0$ என்ற மூலங்கள் கிடைக்கின்றன. எனவே இது ஒன்றுதான் சிறப்புப் புள்ளி.

ஆதியில் $F_{xx} = F_{xy} = F_{yy} = 0$. எனவே,

$(F_{xy})^2 = (F_{xx})(F_{yy})$. ஆதலால், இந்தப் புள்ளி ஒரு கூர் புள்ளியாகும். ஆனால் $F_{xx} = 0$, $F_{xy} = 0$, $F_{yy} = 0$. ஆதலால் சிறப்புத்தன்மை அதிகபடித்தானது. [பார்க்க § 6.4—(D)] எ. கா. 9-இல் உள்ளதைப் போல் கொடுத்த சமன்பாட்டை x-ஆல் பல தடவைகள் வகையிட்டு, $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்புகளைக் கண்டு பிடிப்போம்.

$$F(x, y) = 0$$

x-ஆல் வகையிட, $F_x + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ **(i)**

x-ஆல் வகையிட,

$$F_{xx} + F_{xy}\frac{dy}{dx} + F_y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left[F_{yy}\frac{dy}{dx} + F_{yx}\right] = 0$$

அல்லது $F_{xx} + 2F_{xy}\frac{dy}{dx} + F_y\frac{d^2y}{dx^2} + F_{yy}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ **(ii)**

மறுபடியும் x-ஆல் வகையிட,

$$\begin{aligned} F_{xxx} &+ F_{xxy}\frac{dy}{dx} + 2F_{xy}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \\ &+ 2\frac{dy}{dx}\left[F_{xyx} + F_{xyy}\frac{dy}{dx}\right] \\ &+ F_y\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}\left[F_{yy}\frac{dy}{dx} + F_{yx}\right] \\ &+ F_{yy}\cdot 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy^2}{dx^2} \\ &+ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[F_{yyy}\frac{dy}{dx} + F_{yyx}\right] = 0 \end{aligned}$$

இங்கு $F_x = F_y = F_{xx} = F_{xy} = F_{yy} = 0$, $x = 0$, $y = 0$ என்று பிரதியிட, $0 = 0$ என்றுதான் வருகிறது. எனவே கோவையை சிறிது எளிதாக்கி, மறுபடியும் வகையிட வேண்டும்.

$$F_{xxx} + \frac{dy}{dx}\,[3\,F_{xxy}] + \frac{d^2y}{dx^2}\left[3\,F_{xy} + 3\,F_{yy}\,\frac{dy}{dx}\right]$$
$$+ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left[3F_{xyy}\right]$$
$$+ \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 F_{yyy} + F_y \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

வகையிட,

$$F_{xxxx} + F_{xxxy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\left[3\,F_{xxyy}\,\frac{dy}{dx} + 3\,F_{xxyx}\right]$$
$$+ 3\,F_{xxy}\,\frac{d^2y}{dx^2} + 3\,\frac{d^2y}{dx^2}\left[F_{xyx} + F_{xyy}\,\frac{dv}{dx} + F_{yy}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}\right]$$
$$+ \frac{dv}{dx}\left(F_{yyx} + F_{yyy}\,\frac{dv}{dx}\right) + \left(3F_{xy} + 3F_{yy}\,\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+ 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[F_{xyyy}\,\frac{dy}{dx} + F_{xyyx}\right] + 3\,F_{xyy}\left(2\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$
$$+ \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\left[F_{yyyx} + F_{yyyy}\,\frac{dy}{dx}\right] + F_{yyy}\left(3\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$
$$+ F_y\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3}\left[F_{yx} + F_{yy}\cdot\frac{dy}{dx}\right] = 0 \quad \text{(iv)}$$

இங்கு $x = y = F_x = F_y = F_{xy} = F_{xx} = F_{yy}$ என்று பிரதியிட,

$$F_{xxxx} + F_{xxxy}\cdot\frac{dy}{dx}\,(4) + F_{xxxy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(3 + 3)$$
$$+ 6F_{xxy}\,\frac{d^2y}{dx^2} + 16\,F_{xyy}\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 3\,F_{yyy}\,\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+ 4\,F_{xyyy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 F_{yyyy} + F_{yyy}\left(3\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$
$$= 0 \qquad \text{(v)}$$

இப்பொழுது $x = 0$, $y = 0$-ல், F_{xxx} முதலியனவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிப்போம்.

$$F_{xxx} = 60x^2 = 0\,;\ F_{xxy} = -20a^2 y = 0\,;$$

$$F_{xyy} = -20a^2 x = 0$$

$$F_{xxxx} = 120x = 0;\ F_{xxxy} = 0;\ F_{xxyy} = -20a^2;\ F_{xyyy} = 0$$

$$F_{yyy} = 60y^2 = 0\,;\ F_{yyyy} = 120\,y = 0\,;\ F_{yyyx} = 0$$

இந்த மதிப்புகளை (v)-ல் பிரதியிட

$$(-120\,a^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad \text{(vi)}$$

என்று மட்டும் வருகிறது. (v)-என்பது $\left(\frac{dy}{dx}\right)$-ல் 4-ம் படி சமன்பாடானதால், அதற்கு நான்கு மூலங்கள் இருக்க வேண்டும். $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ என்ற இரண்டு உறுப்புகளின் கெழுக்களும் பூச்சியமானதால், இரு மூலங்கள் கந்தழி (infinite) மூலங்கள், மற்ற இரு மூலங்களும் (vi)-ஆல், பூச்சிய மூலங்கள்.

எனவே $x = 0$ என்பது ஒரு கூர் தொடுகோடு

$y = 0$ என்பது மற்றொரு கூர் தொடுகோடு,

அதாவது $(0, 0)$ என்ற புள்ளியில், இரு கூர் புள்ளிகள் உள்ளன.

குறிப்பு: கொடுத்த சமன்பாடு 5-ம் படித்தானது. அதில் மிகச்சிறியபடி உறுப்புகள் $-5a^2x^2y^2$ என்ற நான்காம் படித் தானவைதான். எனவே ஆதியில் தொடுகோடுகளைக் கணக்கிட (§ 6.3 கடைசிப் பகுதி) இதனைப் பூச்சியமாக்க வேண்டும். எனவே ஆதியிலுள்ள தொடுகோடுகள் $x^2y^2 = 0$, அல்லது $-x = 0$ இருமுறை; $y = 0$ இருமுறை. இரண்டு தொடுகோடுகள் $x = 0$-வில் சமமானதால் ஆதி ஒரு கூர்புள்ளி; அதேபோல் $y = 0$ என்ற இரு பொருத்தமான (coincident) தொடுகோடுகளும் உள்ளதால், ஆதி இரண்டாம் தடவையும் கூர் புள்ளியாகியது.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குக் குறித்த புள்ளிகளில் தொடு கோடுகளைக் கண்டுபிடி.

1. $y^2 = (x - 2)^2 (x - 3)$ (2, 0)-ல்
2. $x^4 - 4x^3y + 3y^2 + x^2 = 0$ ஆதியில்
3. $y^2 - x^3 + x^5 = 0$,,
4. $y^3 = x^3 + ax^2$,,
5. $(y - 2)^2 = x(x - 1)^2 + 4$,,
6. $y^2 - 2x^2y - x^4y + 2x^4 = 0$,,
7. $x^3 + y^3 - ax^2 = 0$,,
8. $x^4 - 2y^3 - 3y^2 + 2x^2 = 0.$,,
9. $x^5 + y^5 - 40x^2y^2 = 0$; (− 8, 8)-ல்
10. $y^2 = (x - 3)(x - 2)^2$; (2, 0)-ல்
11. $y^2 = (x - 1)(x - 4)^2$; (4, 0)-ல்
12. $x^3 - 5x^2 - 2y^2 + 8x + 4y - 6 = 0$; (2, 1)-ல்
13. $y^2 = x^3(4 - x)^2$; (4, 0)-ல்
14. $x^4 + 4x^3 - 4x^2y - 2xy^2 + 10x^2 + 2y^2 - 4xy + 10x - 8y + 7 = 0$; (− 1, 1)-ல்
15. $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 - 3xy + 6y + 3 = 0$; (1, −1)-ல்
16. $(x^2 + y^2)x - 4y^2 = 0$; (0, 0)-ல்
17. $a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$; (0, 0)-ல்
18. $2y^5 + 5x^5 - 3x(x^2 - y^2)$; (0, 0)-ல்
19. $x^3 + 2x^2 + 2xy - y^2 + 5x - 2y = 0$; (− 1, − 2)-ல்
20. $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy$; (0, 0)-ல்
21. $a^2(x^2 - y^2) = x^2y^2$; (0, 0)-ல்
22. $4(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$; (0, 0)-ல்
23. $y^2(1 - x^2) = x^2(2 - x)^2$; (0, 0)-ல்

24. $y^2 (4 + x^2) - x^2 (4 - x^2) = 0$; $(\pm 2, 0)$-ல்

25. $y^3 - 2y^2 - x^2 + 4x + y - 4 = 0$; $(2, 1)$-ல்

26. $x^4 - 4x^3 - 2y^3 + 4x^2 + 3y^2 - 1 = 0$; $(1, 0)$ மற்றும் $(2, 1)$-ல்

27. $x^4 - 2y^3 - 3y^2 - 2x^2 + 1 = 0$; $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$-களில்

28. மேற்கண்ட $1 \to 27$ கணக்குகளில் சிறப்புப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்து அவைகளை வகைப்படுத்து.

29. $(x + y)^3 - \sqrt{2}\,(y - x + 2)^2 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் இரட்டைப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி. [M. Sc. '65]

30. $(x \cos \alpha - y \sin \alpha - b)^3 - c\,(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 = 0$ என்கிற வளைகோட்டிற்கு α-ன் மதிப்பு எதுவாக இருப்பினும் ஒரு கூர்புள்ளியிருக்கும் எனக் காட்டி, அத்தகைய கூர்புள்ளிகள் எல்லாம் ஒரு வட்டத்தின் மேல் பொருந்தியிருக்கும் என்றும் காட்டு.

31. $y^2 = (x - b)^2 (x - c)$ என்பதன் இரட்டைப்புள்ளிகளை $b < c$ என்னும் பொழுது கண்டு பிடித்து வகைப்படுத்து.

32. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குள்ள மடங்குப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்து வகைப்படுத்து :

(a) $x^3 (x - y) + y^2 = 0$

(b) $y^2 = (x - 1)(x - 2)^2$

(c) $xy^2 - ax^2 + 2a^2 x - a^3 = 0$

(d) $x^4 - 4ax^3 + 2ay^3 + 4a^2 x^2 - 3a^2 y^2 - a^4 = 0$

(e) $(2y + x + 1)^2 - 4 (1 - x)^5 = 0$

(f) $y^3 - x^3 - ax^2 = 0$

(g) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4y^2 - 16y - 17 = 0$

(h) $x = t^2 (t - 1),\ y = t (t - 1)$

(i) $x^3 + y^3 = ax^2$ [M. Sc. 66]

(j) $x^6 - 8x^3 - 12x^2 y + 16x^2 + 48xy + 4y^2 - 64y = 0$

(k) $y^2 = x^3 (4 - x)^2$

(*l*) $(y-2)^2 = x(x-1)^2$

(*m*) $y^2 = ax^2 + ax^3$

34. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குக் கூர்புள்ளிகளைக் கணக்கிட்டு அவைகளை வகைப்படுத்துக.

(i) $y^2 = x^3(4-x)^2$ (ii) $y^3 = x^8$ (iii) $y^2 = x^4$

(iv) $(y-4x^2)^6 = x^7$ (v) $y^2 - 2x^2y - x^5y + x^8$

(vi) $x^4 - 4x^2y - 2xy^3 + 4y^2 = 0$

(vii) $x^3 + 2x^2 + 2xy - y^2 + 5x - 2y = 0$

(viii) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (ix) $x^6 - 2x^4y - 8x^2y + 16y^2 = 0$

35. $x^2 + 2hxy + y^2 = f(x, y)$ என்ற வளைகோட்டில் $f(x, y)$ என்பது இரண்டாம் படிக்கு மேலுள்ள x, y உறுப்புகளை மட்டும் கொண்ட கோவை. இவ்வளைகோட்டின் ஆதி எத்தகைய சிறப்புப்புள்ளி என்று ஆராய்க. [M. Sc. 64]

36. $x^5 - ax^3y + a^2x^2y + a^2y^2 = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் வளைவு மாற்றமும் ஏற்படுகிறது. கூரும் உள்ளது என்று காட்டவும்.

37. $ay^2 = (x-\alpha)^2 (x-\gamma)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $(\alpha, 0)$ என்பது $\alpha < \gamma$ ஆனால் துணையியப்புள்ளி; $\alpha > \gamma$ ஆனால் கணு என்று காட்டு.

38. $y^2(b-x) = x^2(a+x)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் ஒரு கணுப் புள்ளியுள்ளதென்றும், $a + 0$ ஆனால் அது கூர் (முதல் வகை, ஒற்றை) என்றும் காட்டுக.

39. $y^3 - 4x^2y = x^5$ என்பதற்கு ஆதி ஒரு வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகவும் கூராகவும் உள்ளது என்று காட்டுக.

40. $[x^2 + (y-c)^2](x+2) + x = 0$ என்ற வளைகோட்டின் சிறப்புப் புள்ளிகள் எல்லாம் $x = 1$ என்ற நேர்கோட்டின் மேல் பொருந்துகின்றன என்று காட்டுக.

41. $x = a \log \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]$, $y = a \sec\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $(0, a)$,-ல் முதல்வகை ஒற்றைக் கூர் உள்ளது என்றுகாட்டு.

42. $y^3 - 3x^2y + 6c^2x - 4c^3 = 0$ என்பது, c-ன் பல மதிப்புகளுக்கு ஒருவளைகோடு குடும்பத்தைக் குறிக்கும் (family of curves) அவைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு சிறப்புப்புள்ளி உள்ளது என்றும் ; அவைகளின் நியமப்பாதை $y=x$ என்றும் ; $y + 2x = 0$ என்பது ஒவ்வொன்றிற்கும் தொடுகோடென்றும காட்டுக.

43. $y^2(a^2 - x^2) = x^4$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் முதல் வகை இரட்டைக்கூர் உள்ளது என்று காட்டுக.

விடைகள்

1. இல்லை 2. தொடுகோடுகள் கற்பனையாவை.

3. $y = 0$ 4. $x = 0$ 5. $x + 4y = 0$

6. $y = 0$ 7. $x = 0$ 8. $2x = \pm y\sqrt{6}$

9. $y = 8$; $y - 8 = \pm\sqrt{2}(x + a)$ 10. இல்லை.

11. $y = \pm 3\sqrt{x - 4}$ 12. $x - 2 = \pm\sqrt{2}(y - 1)$

13. $y = \pm 8(x - 4)$ 14. $y = 1$

15. $x - 1 = 0$; $y + 1 = 0$ 16. $y = 0$ 17. இல்லை

18. $x = 0$, $x = y$, $x = -y$ 19. $y - x + 1 = 0$

20. $x = 0$, $y = 0$ 21. $x = \pm y$ 22. $x = \pm y$

23. $2x = \pm y$ 24. $x = \pm 2$

25. $y = \pm(x - 2)$ 26. $2(x - 1) = \pm\sqrt{6}\cdot y$;
$2(x - 2) = \pm\sqrt{3}(y - 1)$

27. $(1, 0)$-ல் $2(x - 1) = \pm y\sqrt{3}$
$(-1, 0)$-ல் $\sqrt{3}\cdot y = \pm 2(x + 1)$
$(0, -1)$-ல் $y + 1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,x$

28. (i) $(2, 0)$ துணையியப்புள்ளி,
(ii) $(0, 0)$ துணையியப்புள்ளி
(iii) $(0, 0)$ கூர் (iv) $(0, 0)$ கூர்
(v) சாதாரணப்புள்ளி (vi) கூர்
(vii) கூர் (viii) கணு
(ix) மும்மடிப் புள்ளி (Triple point)
(x) துணையியப்புள்ளி (xi) கணு

(xii) கணு (xiii) கணு
(xiv) கூர் (xv) கணு
(xvi) கூர் (xvii) துணையியப்புள்ளி
(xviii) மும்மடிப்புள்ளி (xix) கூர்
(xx) கணு (xxi) கணு
(xxii) கணு (xxiii) கணு
(xxiv) $(0, 0)$ என்பது கணு
(xxv) கணு (xxvi) இரண்டு புள்ளிகளும் கணு
(xxvii) எல்லாம் கணுப்புள்ளிகள்.

29. ஒரே ஒரு கூர் $(1, -1)$-ல்

30. வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = b^2$;
கூர் $(b\cos\alpha - b\sin\alpha)$.

31. $(b, 0)$ என்பது துணையியப்புள்ளி

32. மூன்றுமே கணுப் புள்ளிகள் $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, -a)$

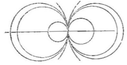
33. (a) $(0, 0)$-ல் கூர் (b) $(2, 0)$-ல் கணு
(c) $(a, 0)$-ல் கணு (d) $(a, 0)$-ல் துணையியப்புள்ளி
(e) $(1, -1)$-ல் கூர் (f) $(0, 0)$-ல் கூர்
(g) $(-1, -2)$-ல் துணையியப்புள்ளி
(h) $(0, 0)$-ல் கணு (i) $(0, 0)$-ல் கூர்
(j) $(2, 2)$-ல் கணு (k) $(0,0)$-ல் கூர்; $(4, 0)$-ல் கணு
(l) $(1, 2)$-ல் கணு (m) $(0, 0)$; இது $a > 0$ என்றால் கணு; $a = 0$ என்றால் கூர்; $a < 0$ என்றால் துணையியப்புள்ளி.

34. (i) $(0, 0)$ முதல் வகை, ஒற்றைக் கூர்
(ii) $(0, 0)$ முதல் வகை, ஒற்றைக் கூர்
(iii) $(0, 0)$ முதல் வகை, இரட்டைக்கூர்
(iv) $(0, 0)$ ஒற்றைக்கூர், இரண்டாம் வகை
(v) $(0, 0)$-ல் முதல் வகை ஒற்றைக்கூர்
(vi) $(0, 0)$ ஒற்றைக்கூர், இரண்டாம் வகை
(vii) முதல்வகைக்கூர் $(-1, -2)$-ல்
(viii) முதல்வகைக் கூர்கள் ; $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, a)$, $(0, -a)$ களில் ஒற்றைக் கூர்கள்.
(ix) இரட்டைக்கூர், இரண்டாம்வகை

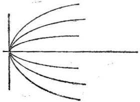
7. தழுவுகோடுகள்
(ENVELOPES)

§ 7·1. வளைவுகோடு குடும்பங்கள்

$F(x, y, a) = 0$ என்பது ஒரு சமன்பாடு. இது ஒரு வளை கோட்டினைக் குறிப்பிடும். a என்பதற்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளை எடுத்துக்கொண்டால், வெவ்வேறு வளைகோடுகள் கிடைக்கும். அத்தகைய வளைகோடுகளை எல்லாம் ஒரு கூட்டமாக அல்லது



படம் 7.1



படம் 7·2

குடும்பமாகக் கருதலாம். a என்பதை அக்கூட்டத்தின் துணை அலகு (parameter) என்று சொல்லலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ என்பது ஒரு வட்டத்தைக் குறிப்பிடும். இதன் மையம் $(a, 0)$; இது x-அச்சின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி; ஆரம் $= a$. இந்தக் குடும்பத்தின் எல்லா வட்டங்களும் ஆதியினூடே செல்லும்; மற்றும் அவைகளின் மையங்கள் x-அச்சின் மேல் இருக்கும். படம் 7·1

$y^2 = 4ax$ என்பது ஒரு பரவளையக் குடும்பத்தைக் குறிப்பிடும். இவைகளின் உச்சி ஆதியாகும்; அச்சு x-அச்சு. எனவே படம் 7·2-ஐ போல் அமையும்.

$y = ax + \frac{4}{a}$ என்ற நேர்கோட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு a ஒரு துணை அலகு ஆனால், சமன்பாடு ஒரு நேர்கோடு குடும்பத்தைக் குறிப்பிடும். இது $y^2 = 16x$ என்ற பரவளையத்திற்கு ஒரு தொடுகோடாக அமைகிறது என்று காணலாம். அதாவது, a-ன் மதிப்பு ஏதாக இருப்பினும், $y = ax + \frac{4}{a}$ என்பது $y^2 = 16x$ என்பதற்குத் தொடுகோடு.

மேற்கூறியவை எல்லாம், ஒரே ஒரு துணை அலகு கொண்ட வளைகோட்டுக் குடும்பங்கள். இரு துணை அலகுகள் உள்ள குடும்பங்களையும் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$ என்பது இரு துணையலகுகள் கொண்ட வட்டங்களின் குடும்பங்களைக் குறிப்பிடும். இவைகள் எல்லாம் ஆதியினூடே செல்பவை.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்பது மையங்கள் ஆதியாக உள்ள ஒரு நீள் வட்டக் குடும்பத்தைக் குறிப்பிடும்.

§ 7.2. தழுவுகோடு அல்லது தழுவி (Envelope)

$F(x, y, a) = 0$ என்பது ஒரு துணை அலகு வளைகோட்டுக் குடும்பம், a_1, a_2 என்பவை a-ன் இரு மதிப்புக்களானால், பொதுவாக, $F(x, y, a_1) = 0$; $F(x, y, a_2) = 0$ இந்த இரண்டு வளைகோடுகளும் ஒன்றை ஒன்று வெட்டும். a_1, a_2 என்பவை அடுத்தடுத்த மதிப்புக்களானால் (consecutive values) அவற்றிற்குரிய வளைகோடுகள் அடுத்தடுத்த வளைகோடுகள் எனப்படும் (consecutive curves of the family), $a_1 = a$; $a_2 = a + h$ என்போம். $h \to 0$ அதாவது h பூச்சியத்தை எல்லையாக அணுகும்பொழுது இவ்விரண்டு வளைகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளியை இறுதி வெட்டும்

புள்ளி (ultimate point of intersection) என்று கூறுவோம். இது போன்ற புள்ளிகளின் நியமப்பாதையை அக் குடும்பத்தின் தழுவு கோடு அல்லது தழுவி (Envelope) என்போம்.

எ. கா. 1

$y = ax + \frac{4}{a}$ என்ற நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$y = ax + \frac{4}{a}$$

மற்றும் $y = (a + h)\, x + \frac{4}{(a + h)}$ என்பவை அடுத்தடுத்த நேர்கோடுகள்.

இவை இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகளைக் கணக்கிட, y-ன் இருமதிப்புக்களைச் சமமாக்க வேண்டும்.

எனவே $x = \frac{4}{a\,(a + h)}$; $y = \frac{4\,(2a + h)}{a\,(a + h)}$

இப்பொழுது $h \to 0$ என்ற எல்லைக்குச் சென்றால்,

$x \to \frac{4}{a^2}$ மற்றும் $y \to \frac{8}{a}$ என்ற மதிப்புகள் கிடைக்கும். எனவே இந் நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தின் அடுத்தடுத்த இரு கோடுகளின் இறுதி வெட்டும் புள்ளி $x = \frac{4}{a^2}$, $y = \frac{8}{a}$. இப் புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண இவைகளிடையே a-ஐ விலக்க $y^2 = 16x$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

எனவே, $y^2 = 16x$ என்பது, $y = ax + \frac{4}{a}$ என்ற நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தின் தழுவுகோடாகும்.

§ 7·3. பொதுவாகத் தழுவுகோடுகளைக் கணக்கிடல்

$F(x, y, a) = 0$ என்பது ஒரு வளைகோட்டுக் குடும்பம். $F(x, y, a) = 0$, $F(x, y, a + \triangle a) = 0$ என்பவை அடுத்தடுத்த வளைகோடுகள்.

இவை இரண்டிற்கும் பொதுவான புள்ளிகளில் $F(x, y, a + \triangle a) - F(x, y, a) = 0$

அதாவது $\dfrac{F(x, y, a + \triangle a) - F(x, y, a)}{\triangle a} = 0$

இப்பொழுது $\triangle a \to 0$ என்று வைப்போம்.

$\dfrac{\partial F}{\partial a} = 0$ என்ற முடிவு கிடைக்கிறது.

இந்த சமன்பாட்டுடன், கொடுத்த சமன்பாட்டையும் வைத்து a-ஐ விலக்க (Eliminate), நமக்கு $\phi(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இதுவே தழுவுகோட்டின் சமன்பாடு ஆகும்.

ஆக, $F(x, y, a) = 0$ மற்றும் $\dfrac{\partial F}{\partial a} = 0$ என்ற சமன் பாடுகளிலிருந்து a-ஐ விலக்கத் தழுவுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எ. கா. 2

கொடுக்கப்பட்ட ஆரையுடைய, மற்றும் தங்கள் மையங்களை யெல்லாம் ஒரே நேர்கோட்டில் உடைய, ஒரு வட்டக் குடும்பத்தின் தழுவுகோட்டைக் கண்டுபிடி.

கொடுக்கப்பட்ட ஆரை $= k$, என்றும், மையங்கள் பொருந்தும் நேர்கோட்டை x-அச்சாகவும் கொண்டால் மையம் $(a, 0)$ என்பதாகிறது. எனவே, வட்டக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு

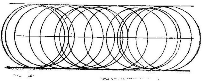
$$(x - a)^2 + y^2 = k^2 \qquad \text{(i)}$$

இங்கு k-நமக்குத் தெரிந்தது, a-தான் துணை அலகு. a-ஆல் வகையிட

$$x - a = 0 \qquad \text{(ii)}$$

(i), (ii)-களிலிருந்து, a-ஐ விலக்க

$y^2 = k^2$ அல்லது $y = \pm k$ என்ற தழுவுகோடு வருகிறது. அதாவது தழுவு கோடுகள் இரு நேர்கோடுகள். இவை எல்லா வட்டங்களுக்கும் தொடு கோடுகள் ஆகும். [படம் 7·3 பார்க்க] இந்த பொதுப்பண்பை அடுத்த பகுதியில் நிரூபிப்போம்.



படம் 7·3

எ. கா. 3

$y^2 - 4 - c\,(x + c) = 0$-ன் தழுவியைக் கண்டுபிடி.

$$F = y^2 - 4 - c\,(x + c) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = -x - 2c = 0 \text{ அதாவது } x + 2c = 0$$

இதை $y^2 - 4 - c\,(x + c) = 0$-ல் பிரதியிட

$$y^2 - 4 + \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right) = 0. \text{ அல்லது}$$

$4y^2 + x^2 - 16 = 0$ என்பது தழுவி.

7.4 தழுவி பொதுவாகக் கூட்டத்தின் ஒவ்வொரு வளை கோட்டையும் தொடும்.

(x, y) என்ற புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டிற்குத் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{-F_x}{F_y}$.

தழுவிக்கு அதே புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

$F(x, y, a) = 0$ மற்றும் $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ என்பதிலிருந்து $x = h(a)$; $y = k(a)$ என்று வருகிறது என்போம்.

$F(x, y\ a) = 0$-ஐ a-ஆல் வகையிட,

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{da} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{da} + \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{da}{da} = 0$$

$\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ ஆதலால், இதிலிருந்து $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{F \partial / \partial y}$

$= -\frac{F_x}{F_y}$ என்று முன்போலவே வருகிறது.

எனவே, இறுதிவெட்டும் புள்ளிகளில், தழுவிக்கும், வளைகோட்டிற்கும் ஒரு பொதுவான தொடுகோடு உள்ளது.

அதாவது, $F(x, y, a) = 0$ என்பது ஒரு வளைகோட்டுக் குடும்பம். அதற்கு E என்ற வளைகோடு தழுவியானால் :—

(i) குடும்பத்தின் ஒவ்வொரு வளைகோட்டின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டிற்கும், தழுவிக்கும் ஒரு பொதுவான தொடுகோடு இருக்கும்.

(ii) E-ன் மேலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் குடும்பத்தின் ஒரு வளைகோடு தொட்டுச் செல்லும்.

குறிப்பு: $F_x = F_y = 0$ என்றால், அந்த இடங்களில் $\frac{dy}{dx}$-ஐ கணக்கிட முடியாது. முன் அத்தியாயத்தில் $F_x = F_y = 0$ என்றால், வளைகோட்டின் சிறப்புப் புள்ளிகள் கிடைக்கும் என்பதைக் கண்டுள்ளோம். எனவே சிறப்புப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையும் $F(x, y, a) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ என்பவற்றில் உள்ளடங்கியிருக்கும்.

அதாவது கணுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை, கூர்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை, துணையியப்புள்ளிகளின் நியமப் பாதைகளிலும் $F(x, y, a) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ ஆக இருக்கும். ஆனால் அவைகள்

வளைகோடுகளைத் 'தழுவாது', எனவே, அத்தகையவைகளைத் தழுவிகள் என்று கூற மாட்டோம்.

எ. கா. 4.

$(y-a)^2 = x^2 (x+6)$ என்ற வளைகோட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$F = (y-a)^2 - x^2 (x+6)$$

$$F_x = 3x^2 - 12x, \qquad F_y = 2(y-a)$$

$F_x = F_y = 0$ என்றால் $x = 0$, $y = a$ என்று வருகிறது. எனவே $(0, a)$ என்பது சிறப்புப்புள்ளி.

$$F_{xx} = -6x - 12 \qquad F_{xy} = 0 \qquad F_{yy} = 2$$

$$(0, a)\text{-ல்} \quad F^2_{xy} = 0 \qquad F_{xx} \cdot F_{yy} = -24$$

ஆக $F^2_{xy} > F_{xx} \cdot F_{yy}$. எனவே புள்ளி ஒரு கணு. கணுப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $x = 0$; ஆனால் இது கொடுக்கப்பட்ட வளைகோடுகளைத் தொடாது.

தழுவியைக் கண்டுபிடிக்க.

$$\left.\begin{aligned} F &= (y-a)^2 - x^2 (x+6) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a} &= -2(y-a) = 0 \end{aligned}\right\}$$

இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து a-ஐ விலக்க வேண்டும். விலக்க, $x^2 (x+6) = 0$ அல்லது $x = 0$, $x + 6 = 0$ என்று இரு மூலங்கள் கிடைக்கின்றன.

இவைகளில் $x = 0$, தழுவியல்ல என்று முன்பே கண்டோம்; $x + 6 = 0$ என்பது ஒவ்வொரு வளைகோட்டையும் தொடுமாதலால், அதுதான் தழுவி.

எ. கா. 5.

ஒரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி $y^2 = 4ax$ என்ற **வளை** கோட்டின் மேலுள்ளது; அந்த வட்டம், வளைகோட்டின் **உச்சியி** னூடே செல்கிறது. வட்டத்தின் தழுவி என்ன? [M. Sc. '65]

வட்டத்தின் மையத்தை (h, k)

என்போம்; அது $y^2 = 4ax$-ன் உச்சியான $(0, 0)$-வின் ஊடே செல்வதால், அதன் சமன்பாடு,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2 + k^2 \qquad \text{(i)}$$

இங்கு (h, k) என்பது $y^2 = 4ax$-ன் மேலுள்ளதால் $k^2 = 4ah$. எனவே (i)-ஐ எளிதாக்க

$$x^2 + y^2 - 2hx - 4\sqrt{ah} \cdot y = 0 \qquad \text{(ii)}$$

இதனை h-ஆல் வகையிட

$$-2x - 4\sqrt{a}\, y \cdot \frac{1}{2\sqrt{h}} = 0$$

அதாவது $h = \frac{ay^2}{x^2}$. இந்த மதிப்பை (ii)-ல் பொருத்த

$$x^2 + y^2 - \frac{2ay^2}{x} + \frac{4ay^2}{x} = 0$$

அல்லது $x(x^2 + y^2) + 2ay^2 = 0$ (iii)

இதுதான் தழுவியின் சமன்பாடு

$$\text{தழுவியின் சாய்வு விகிதம்} = -\frac{(3x^2 + y^2)}{2y(x + 2a)} \qquad \text{(iv)}$$

$$\text{வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதம்} = \frac{h - x}{y - 2\sqrt{ah}} \qquad \text{(v)}$$

இங்கு $\sqrt{h} = -\sqrt{a}\,\frac{y}{x}$ என்று பிரதியிட

$$\text{(v)} = \frac{ay^2 - x^2}{xy(x + 2a)}$$

(ii) -லிருந்து $ay^2 = -\frac{x}{2}(x^2 + y^2)$ என்று பிரதியிட

(v) $= \dfrac{-3x^2 - y^2}{2y\,(x+2a)} =$ (iv) ஆகிறது.

எனவே (iii), (i)-ன் தழுவிதான்.

எ. கா. 6.

$y^3 - 3x^2y + 6c^2x - 4c^3 = 0$ என்ற குடும்பத்தின் ஒவ்வொரு வளைகோட்டிற்கும் ஒரு சிறப்புப் புள்ளி உண்டு என்று காட்டு. குடும்பத்தின் தழுவியைக் கண்டுபிடி.

$$F(x, y) = y^3 - 3x^2y + 6c^2x - 4c^3 = 0$$

வகையிட

$$F_x = -6xy + 6c^2 \qquad F_y = 3y^2 - 3x^2$$

$$F_{xx} = -6y; \qquad F_{xy} = -6x; \quad F_{yy} = 6y$$

$F_x = F_y = 0$ என்றால், $y = +x$ மற்றும் $-6x^2 + 6c^2 = 0$ அல்லது $x = \pm c$. ($y = -x$ என்றால் x கற்பனை எண் ஆகி விடும்)

அதாவது $y = x, \ x = \pm c$

எனவே (c, c), சிறப்புப் புள்ளி (i)

[புள்ளி $(-c, -c)$ வளைகோட்டின் மேல் இல்லை.]

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 12cx - 12c^2 = 0 \quad \text{அதாவது} \quad x - c = 0$$

இந்த மதிப்பைக் கொடுத்த வளைகோட்டில் பிரதியிட,

$$y^3 - 3x^2y + 2x^3 = 0 = (y-x)^2\,(y+2x) = 0$$

எனவே $y - x = 0$ அல்லது $y + 2x = 0$ என்ற இரு முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

(i)-ஆல் $y = x$ என்பது சிறப்பு புள்ளிகளின் நியமப்பாதை என்று தெரிகிறது.

F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}-களில் $x = y = c$ என்று பிரதியிட,

$$F_{xx} = -6c; \quad F_{yy} = 6c; \quad F_{xy} = -6c$$

அதனால் $F^2_{xy} = 36c^2$; $F_{xx} \cdot F_{yy} = -36c^2$

எனவே $F^2_{xy} > F_{xx} F_{yy}$

அதாவது (c, c) கணுப்புள்ளி

அடுத்ததாக உள்ள $y + 2x = 0$ என்பதுதான் தழுவி.

எ. கா. 7.

$(y - c)^2 (x - 1) + x^2 (x + 1) = 0$-விற்குத் தழுவி எது ? கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $F(x, y, c) = 0$ ஆனால்

$F_c = 2(y - c)(-1)(x - 1) = 0$ அதாவது $y = c$ அல்லது $x = 1$.

$y = c$ என்று வைத்து, c-ஐ விலக்க $x^2(x + 1) = 0$. அதாவது $x = 0$ அல்லது $x + 1 = 0$ என்ற இரு முடிவுகள் வருகின்றன. இவற்றை ஒவ்வொன்றாக ஆராய்வோம்.

$x + 1 = 0$

இதற்குப் பொருத்தமான வளைகோட்டின் மேலுள்ள புள்ளி $(-1, c)$ என்று எளிதாகக் காணலாம்.

$x + 1 = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் சாய்வு விகிதம் $= \infty$

வளைகோட்டிற்கு அதே புள்ளியில் சாய்வு விகிதம் $= \infty$

அதனால், $x + 1 = 0$ என்பது தழுவியாகும்.

(i)-ஐ x-ஆல் வகையிட

$2(y - c)(x + 1) y_1 + (y - c)^2 + 3x^2 + 2x = 0$.
$x = -1$, $y = c$ என்று பிரதியிட $0 \cdot y_1 + 1 = 0$ அல்லது

$y_1 = \infty$. எனவே $x + 1 = 0$ என்ற நேர்கோடுதான் கூட்டத்தின் தழுவி.

$x = 0$

இந்த மதிப்பை (i)-ல் பிரதியிட $(y - c)^2 (-1) = 0$ அல்லது $y = c$. எனவே $(0, c)$ என்பது எத்தகைய புள்ளி என்று பார்க்க வேண்டும்.

$F = (y-c)^2(x-1) + x^2(x+1) = 0$ என்றால்

$F_x = (y-c)^2 + 3x^2 + 2x$
$F_{xx} = 6x + 2$; $F_{xy} = 2(y-c)$
$F_y = 2(y-c)(x-1)$ $F_{yy} = 2(x-1)$

$(0, c)$ என்ற புள்ளியில் $F_x = 0 = F_y$. எனவே அது ஒரு சிறப்புப்புள்ளி. மற்றும் $F_{xx} = 2$; $F_{xy} = 0$; $F_{yy} = -2$ எனவே $(F_{xy})^2 = 0 > (F_{xx})(F_{yy}) = -4$. ஆக அது ஒரு கணுப்புள்ளி. அதாவது $x = 0$ என்பது கணுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை.

எ. கா. 8.

$(y-c)^2 + x^2(2x-c) = 0$ என்பதற்குத் தழுவியைக் கண்டுபிடி.

$F = (y-c)^2 + x^2(2x-c) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial c} = 2(y-c)(-1) - x^2 = 0$. அல்லது $c = y + \frac{x^2}{2}$

இதனை முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + x^2\left(2x - y - \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$x^2\,[x^2 + 8x - 4y - 2x^2] = 0$$

அல்லது $x = 0$; $8x - 4y - x^2 = 0$

$x = 0$-வை எடுத்துக்கொண்டால், $x = 0,\ y = c$ என்பது $F = 0$-ன் மேலுள்ள புள்ளி.

$F_x = 6x^2 - 2cx$ $F_{xx} = 12x - 2c$ $F_{xy} = 0$

$F_y = 2(y-c)$ $F_{yy} = 2$

$(0, c)$ என்ற புள்ளியில், $F_x = F_y = 0$. எனவே அது ஒரு சிறப்புப் புள்ளி.

$F_{xx} = -2c$; $F_{xy} = 0$; $F_{yy} = 2$

எனவே $(F_{xy})^2 = 0 > (F_{xx})(F_{yy}) = -4c$

எனவே $(0, c)$ என்பது கணுப்புள்ளி ; அல்லது $x = 0$ என்பது கணுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை.

$8x - 4y - x^2 = 0$ என்பது தான் தழுவி.

§ 7·5. போலார் வளைகோடுகளுக்குத் தழுவியைக் காணுதல்

$F(r, \theta, a) = 0$ என்பது போலார் சார்பலனானால், தழுவியைக் காண $F(r, \theta, a) = 0$ மற்றும் $\dfrac{\partial F}{\partial a} = 0$ என்பனவற்றிலிருந்து a ஐ விலக்க வேண்டும். எனவே முறை முன்போலவே தான்.

எ. கா. 9

$r = 5(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளையின் ஆரைத் திசையிகளுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட நேர்கோடுகளின் தழுவி என்ன ?

'a' என்ற கோணத்தையுடைய OP-என்றஆரைத்திசையியின் $r = 5(1 + \cos a)$

P-ல் OP-க்கு ஒரு செங்குத்தான நேர்கோட்டை வரைந்தால் அதன் சமன்பாடு $r\cos(\theta - a) = 5(1 + \cos a)$ (i)

இங்கு a-தான் துணைஅலகு

(i)-ஐ a-ஆல் வகையிட $r\sin(\theta - a) = -5\sin a$ (ii)

இந்த (i), (ii) சமன்பாடுகளிலிருந்து a-ஐ விலக்க வேண்டும். இரண்டினையும் எளிதாக்க,

$r\cos\theta\cos a + r\sin\theta\sin a - 5\cos a = 5$ (iii)

$r\sin\theta\cos a - r\cos\theta\sin a + 5\sin a = 0$ (iv)

$(r\cos\theta - 5)\cos a - (r\sin\theta)\sin a = 5$ (v)

$r\sin\theta\cdot\cos a + (5 - r\cos\theta)\sin a = 0$ (vi)

(vi) -லிருந்து $\tan a = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta - 5}$

எனவே $\cos a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 a}}$

$$= \frac{r\cos\theta - 5}{\sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - 10r\cos\theta + 25}}$$

அதாவது $\cos a = \dfrac{r\cos\theta - 5}{\sqrt{r^2 + 25 - 10r\cos\theta}}$ (vii)

மற்றும் $\sin a = \tan a\cos a = -\dfrac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2+25-10r\cos\theta}}$ (viii)

இந்த இரண்டு முடிவுகளை (v)-ல் பிரதியிட

$$\frac{(r\cos\theta - 5)^2}{\sqrt{r^2+25-10r\cos\theta}} + \frac{(r\sin 6)^2}{\sqrt{r^2+25-10r\cdot\cos\theta}} = 5$$

$$\sqrt{r^2+25-10r\cos\theta} = 5$$

அல்லது $r = 10\cos\theta$ என்பது தான் தழுவி.

§ 7·6. தழுவியைக்காண வேறு சில தனி வகை முறைகள்

A. ஒரு வளைகோட்டின் சமன்பாடு $Pa^2 + Qa + R = 0$ என்று துணை அலகின் சார்பலனாக எழுதினால், தழுவியைக் காண கீழ்க்கண்ட இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து 'a'-ஐ விலக்க வேண்டும்.

$$\left.\begin{aligned} Pa^2 + Qa + R &= 0 \\ 2Pa + Q &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

B. ஒரு வளைகோட்டின் சமன்பாடு $Pa^3+Qa^2+Ra+S=0$ என்று துணை அலகின் மூன்றும்படிச் சமன்பாடாக எழுதினால், தழுவி கீழ்கண்ட இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து a-ஐ விலக்கினால் கிடைக்கும்.

$$(RQ-9PS)^2 = 4\,(3QS-R^2)\,(3PR-Q^2) \qquad (70)$$

நிருபணம் : *A.* $F(x, y, a) = Pa^2 + Qa + R = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2Pa + Q$$

எனவே, $F=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial a}=0$ களிலிருந்து 'a'-ஐ விலக்க (69)-ம் முடிவு கிடைக்கின்றது.

B. $F(x, y, z) = Pa^3 + Qa^2 + Ra + S = 0$ (i)

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \text{ விலிருந்து } 3Pa^2 + 2Qa + R = 0 \qquad \text{(ii)}$$

(i)-ஐ, 3-ஆல் பெருக்கி, (ii)-ஐ a-யினால் பெருக்கி, ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றைக் கழிக்க,

$$Qa^2 + 2Ra + 3S = 0 \qquad \text{(iii)}$$

என்று வருகிறது.

(ii), (iii)-லிருந்து a, a^2-இரண்டையும் விடைகாண

$$\frac{a^2}{6QS-2R^2} = \frac{a}{RQ-9PS} = \frac{1}{6PR-2Q^2}$$

அல்லது $(RQ-9PS)^2 = 4\ (3QS-R^2)\ (3PR-Q^2)$ என்று தழுவியின் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

எ. கா. 10.

$\dfrac{x^2}{4} - 2\lambda\dfrac{xy}{6} + \dfrac{y^2}{9} = 1 - \lambda^2$ என்பதற்குத் தழுவியைக் கண்டுபிடி (λ - துணை அலகு).

சமன்பாட்டை λ-வின் இருபடி சமன்பாடாக எழுத

$$\lambda^2 - \left(\frac{xy}{3}\right)\lambda + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right) = 0$$ என்று எழுதவும்.

இதனை λ-வால் வகையிட்டுப் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க.

$$2\lambda - \frac{xy}{3} = 0$$ அல்லது $\lambda = \frac{xy}{6}$ என்று கிடைக்கிறது.

λ-வின் இந்த மதிப்பைச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$\frac{x^2y^2}{36} - \frac{x^2y^2}{18} + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

அல்லது $-x^2y^2 + 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

அதாவது $(x^2 - 4)(y^2 - 9) = 0$

தழுவி $x = \pm 2$, $y = \pm 3$ என்ற நான்கு நேர்கோடுகளுடைய இணைகரம்.

எ. கா. 11.

$ay^2 = (x - c)^3$ என்ற அரைமுப்படி பரவளைவு (Semi-cubical parabola) களுக்கான தழுவியைக் கண்டுபிடித்து அது கூர்புள்ளிகளின் நியமப்பாதையும் ஆகும் என்று காட்டு. (இங்கு, c-துணையலகு)

சமன்பாட்டை c-ன் முப்படி சமன்பாட்டாக எழுதுவோம்.

$$c^3 - 3xc^2 + 3cx^2 + (ay^2 - x^3) = 0$$

§ **7·6.** (B)-ல் கண்டுள்ளதுடன் இதனை ஒப்பிட

$$P = 1,\ Q = -3x,\ R = 3x^2,\ S = ay^2 - x^3.$$

(70)-ல் இந்த மதிப்புகளைப் பிரதியிடு.

$$(-9x^3 - 9ay^2 + 9x^3)^2 = 4[-9x(ay^2 - x^3) - 9x^4][9x^2 - 9x^2]$$

அதாவது $y^2 = 0$ அல்லது $y = 0$. இது தான் தழுவி.

$ay^2 = (x - c)^3$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $(c, 0)$ என்பது கூர் என்பதனை முன்பே கண்டுள்ளோம்.

எனவே $y = 0$ என்பது கூர் நியமப்பாதையும் கூட ஆகும்.

எ. கா. 12.

$(x - c)^2 + y^2 = (x - c)^3$ என்பதற்குத் தழுவியைக் கண்டுபிடி.

c-ன் முப்படி சமன்பாடாக எழுத,

$$c^3 + (1 - 3x) c^2 + (3x^2 - 2x) c + (x^2 + y^2 - x^3) = 0$$

இங்கு $P = 1$; $Q = 1 - 3x$; $R = 3x^2 - 2x$; $S = x^2 + y^3 - x^3$. $(RQ - 9PS)^2 = 4\,(3QS - R^2)(3PR - Q^2)$ என்பதில் இந்த மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$$[(1-3x)(3x^2-2x) - 9x^2 - 9y^2 + 9x^3]^2$$
$$= 4\,[3(1-3x)(x^2 + y^2 - x^3) - (3x^2 - 2x)^2]$$
$$\times [(9x^2 - 6x) - (1 - 3x)^2]$$

அதாவது $(-2x - 9y^2)^2 = 4\,(-x^2 + 3y^2 - 9xy^2)(-1)$
$$= 81y^4 + 12y^2 = 0$$

அல்லது $y^2\,(12 + 81y^2) = 0.$

அதாவது $y = 0$; அல்லது $81y^2 + 12 = 0$. இரண்டாவது சமன்பாடு ஒரு கற்பனை வளைகோடானதால் அதனை நீக்கி விட வேண்டும்.

$y = 0$ என்பது தழுவியாக இருக்கலாம். வளைகோட்டிற்குச் சிறப்புப் புள்ளிகள் உள்ளதால் இதனைச் சிறிது ஆராயவேண்டும்.

$F = (x - c)^2 + y^2 - (x - c)^3 = 0$ என்போம்.

இங்கு $y = 0$ என்றால் $x = c$ என்ற ஒரே மெய்யான மூலம் வருகிறது.

எனவே $(c, 0)$ என்பது வளைகோட்டின் மேலுள்ள புள்ளி.

$F_x = 2\,(x - c) - 3\,(x - c)^2 \qquad F_y = 2y$

$F_{xx} = 2 - 6\,(x - c) \qquad F_{yy} = 2, \quad F_{xy} = 0.$

$(c, 0)$-வில், $F_x = F_y = 0$. ஆதலால், அது சிறப்புப்புள்ளி.

மற்றும் அங்கு $F_{xx} = 2$; $F_{yy} = 2$; $F_{xy} = 0$ ஆகும். ஆதலால் $(F_{xy})^2 < F_{xx} \cdot F_{yy}$.

எனவே $(c, 0)$ என்பது ஒரு துணையியப் புள்ளி.

அதாவது துணையியப் புள்ளிதான் உள்ளதே தவிர, தழுவி கிடையாது.

§ 7·7. இரு துணை அலகுகள் ; தேராத பெருக்கிகள் முறை : (Method of undetermined multipliers)

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் ஒரு எளிதான இரு துணை அலகுகளின் கணக்கைப் பார்த்தோம். இங்கு அதனையே பொதுப் படையாக நோக்குவோம்.

$$F(x, y, a, b) = 0 \qquad \text{(i)}$$

என்பது இரு தனி அலகுகளைக் கொண்ட வளைகோட்டுக் கூட்டம். a, b என்ற இரண்டையும் $f(a, b) = 0$ (ii) என்ற சமன்பாடு சேர்க்கிறது என்போம். இப்பொழுது (i)-ம் கூட்டத்திற்கு (ii)-ம் நிபந்தனைக்குட்பட்ட தழுவியைக் காண வேண்டும்.

இரண்டு சமன்பாட்டையும் a-ஆல் வகையிட

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{db} \cdot \frac{da}{db} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{da}{db} = 0 \qquad \text{(iv)}$$

இந்த (i), (iv) சமன்பாடுகளிலிருந்து, $a, b, \frac{da}{db}$ என்ற மூன்றையும் விலக்கத் தழுவி கிடைக்கும்.

அல்லது (iii), (iv) களிலிருந்து

$$\frac{\partial F}{\partial a} \bigg| \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} \bigg| \frac{\partial f}{\partial b} = \lambda \text{ என்போம்.} \qquad \text{(v)}$$

எனவே $\frac{\partial F}{\partial a} = \lambda \frac{\partial F}{\partial a}$; $\frac{\partial F}{\partial b} = \lambda \frac{\partial f}{\partial b}$

இப்பொழுது a, b, λ என்பவைகளை இந்த இரண்டு சமன்பாடுகள் மற்றும் $F(x, y, a, b) = 0$; $f(a, b) = 0$ என்பதிலிருந்து விலக்கத் தழுவி கிடைக்கும்.

எ. கா. 13

$bx + ay = ab$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு $ab = c^2$ ஆனால், தழுவியைக் கண்டுபிடி. இங்கு a, b இரண்டும் துணையலகுகள்; c-ஒரு தெரிந்த மாறிலி.

$F(x, b) = bx + ay - ab = 0$. இங்கு $b = \frac{c^2}{a}$ என்று பிரதியிட்டு எளிதாக்க

$$F(x, b, a) = c^2 x + a^2 y - ac^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2ay - c^2 = 0 \qquad \therefore\ a = \frac{c^2}{2y}$$

எனவே $c^2 x + \frac{c^4}{4y^2}\, y - \frac{c^2}{2y} \cdot c^2 = 0$ அல்லது $4xy = c^2$

என்று வருகிறது. இதுவே தழுவி.

எ. கா. 14.

$lx + my + 1 = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் தழுவியை $al^2 + 2hlm + bm^2 + 2gl + 2fm + c = 0$ என்கிற நிபந்தனைக் குட்படுத்திக் கண்டுபிடி.

$$F(x, y, m, n) = lx + my + 1 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$f = al^2 + 2hlm + bm^2 + 2gl + 2fm + c = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$\frac{\partial F}{\partial l} = \lambda \frac{\partial f}{\partial l}$ என்பதினால்

$$x = 2\lambda\,(al + hm + g) \qquad \text{(iii)}$$

$\frac{\partial F}{\partial m} = \lambda \frac{\partial f}{\partial m}$ என்பதினால்

$$y = 2\lambda\,(hl + bm + f) \quad \text{(iv)}$$

இந்த நான்கு சமன்பாடுகளிலிருந்து l, m, λ-களை விலக்க வேண்டும்.

$$\frac{1}{2\lambda} = \frac{al + hm + g}{x} = \frac{hl + bm + f}{y} = \frac{l\,(al + hm + g)}{lx}$$

$$= \frac{m\,(hl + bm + f)}{my}$$

$$= \frac{l\,(al + hm + g) + m\,(hl + bm + f)}{lx + my}$$

$$= \frac{-(gl + fm + c)}{-1}$$

எனவே $gl + fm + c - \frac{1}{2\lambda} = 0$ (v)

(iii), (iv) ஐயும் இதுபோலவே எழுத

$$al + hm + g - \frac{x}{2\lambda} = 0 \quad \text{(vi)}$$

$$hl + bm + f - \frac{y}{2\lambda} = 0 \quad \text{(vii)}$$

மற்றும் $lx + my = 1$ (viii)

இந்த நான்கு சமன் பாடுகளிலிருந்து [(vi), (vii), (v), (viii)] l, m, λ-களை விலக்க

$$\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

என்ற ஓரணிக்கோவை (determinant) பூச்சியமாகிறது.

இங்கு $\triangle = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ என்று வைத்து $a, h, g \ldots\ldots$ முதலியவற்றின் இணைகாரணி (cofactor) களை முறையாக $A, H, G \ldots\ldots$ முதலியவற்றால் வைத்து, ஓரணிக் கோவையை விரிவாக்க

$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$ என்று வரும். இதுதான் (i)-ன் தழுவி.

§ 7.8. தன்மை காட்டிகளும், சிறப்புத் தீர்வுகளும் (Discriminants and singular solutions)

$ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடி சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி (discriminant) $b^2 - 4ac = 0$ என்பதை அறிவோம். இது கிடைக்க $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, மற்றும் $f'(x) = 2ax + b = 0$ என்ற இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து x-ஐ விலக்க வேண்டும் என்பதை இப்பொழுது எளிதில் அறியலாம்.

எனவே $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ என்பனவற்றிலிருந்து x-ஐ விலக்கத் தன்மைகாட்டி கிடைக்கிறது.

C—தன்மை காட்டி (c-discriminant)

$F(x, y, c) = 0$ என்பது ஒற்றைத் தனியலகு வளைகோட்டுக் கூட்டம். இதனை c-ல் சமன்பாடாகக் கருதி,

$F(x, y, c) = 0$, $F'(c) = 0$ என்பதிலிருந்து c-ஐ விலக்க, நமக்கு c-தன்மை காட்டி கிடைக்கிறது.

இதில் தழுவியும் சேர்ந்துள்ளது என்பதை முன்பே கண்டோம். தழுவியே இல்லாமல் $F(x, y, c) = 0$ என்ற வளைகோட்டின் சிறப்புப் புள்ளிகளின் நியமப் பாதைகளும் c-தன்மை காட்டியில் இடம் பெறும் என்பதனை முன்பே கண்டுள்ளோம்; பல எடுத்துக் காட்டுகளிலும் இவைகளை விளக்கியுள்ளோம்.

c-தன்மை காட்டியில், தழுவி ஒரு படித்தான காரணியாகவும், கணுப்புள்ளி நியமப்பாதை (Nodal Locus) இருபடித்தான காரணியாகவும், கூர்புள்ளி நியமப்பாதை (Cuspidal Locus) மும்படித்தான காரணியாகவும் இருக்கும் என்று ஆர்தர் கேய்லி (Arthur

Cayley) என்பவர் நிரூபித்துள்ளார். தழுவியை E என்றும், கணுப் புள்ளி நியமப் பாதையை N என்றும், கூர்புள்ளி நியமப்பாதையை C-என்றும் வைத்தால்,

$$c\text{-தன்மை காட்டி} = EN^2C^3 \tag{71}$$

சிறப்புத் தீர்வுகள் (Singular Solutions)

$\phi(x, y, p) = 0$—(i) என்பது ஒரு வகைக்கெழு சமன்பாடு. இதன் வரிசை (order) ஒன்று; படி (degree) ஒன்றைவிட அதிகம் எனக் கொள்வோம்.

இதனைத் தீர்க்க $f(x, y, c) = 0$ **(ii)**

என்ற சமன்பாடு வருகிறது என்போம். சில வேளைகளில் (i)-கான தீர்வு (ii)-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வாகவோ, பொதுத் தீர்வாகவோ இருக்காது. அத்தகையத் தீர்வுகள் வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வுகள் எனப்படும்.

எடுத்துக் காட்டாக $y = xp - p^2$ **(iii)**

என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டை $\left(P = \dfrac{dy}{dx}\right)$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது $\phi(x, y, p) = y - xp + p^2 = 0$ **(iv)**

இதனை x-ஆல் வகையிட,

$$p - x\frac{dp}{dx} - p + 2p\,\frac{dp}{dx} = 0$$

அல்லது $\dfrac{dp}{dx}(2p - x) = 0$

அதாவது $\dfrac{dp}{dx} = 0$ அல்லது $p = c$ (மாறிலி)

$2p - x = 0$ அல்லது $p = \dfrac{x}{2}$

$p = c$ என்பதை (iii)-ல் பிரதியிட

$$y = xc - c^2 \tag{v}$$

என்ற பொதுத் தீர்வு கிடைக்கிறது.

$$P = \frac{x}{2} \text{ என்பதை (iii)-ல் பிரதியிட, } y = \frac{x^2}{2} \qquad \text{(vi)}$$

என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது. இந்த (vi)-தீர்வை, (v)-லிருந்து c-க்கு ஒரு மதிப்பு கொடுத்து பெற முடியாததலால், இது குறிப்பிட்ட தீர்வும் இல்லை. எனவே இதனைச் சிறப்புத் தீர்வு என்போம்.

p-தன்மைகாட்டி (p-discriminant)

$\phi(x, y, p) = 0$ என்பதை p-ன் சமன்பாடாகக் கருதி, அதனை

$\phi = 0$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial p} = 0$ களிலிருந்து விலக்கினல், நமக்கு p-தன்மை

காட்டி கிடைக்கும்.

இதில் எந்தெந்த வளைகோடுகள் இடம் பெறக்கூடும் என்பதனை விளக்குவோம் :

(i) E என்னும் தழுவி. ஏனென்றால், அடுத்தடுத்த இரு வளைகோடுகளின் இறுதியான வெட்டும் புள்ளிகளில் $f(x, y, c) = 0$ என்பதன் ஒவ்வொரு வளைகோட்டையும் இது தொடுகிறது.

(ii) C என்னும் கூர்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை. இரு சமமான p மதிப்புகள் கூர்புள்ளிகளிலும் உண்டு (ஒவ்வொரு வளைகோட்டிற்கு ஒன்ருக).

(iii) சமமான இரு p-மதிப்புகள் அடுத்தடுத்த இரு வளைகோடுகளுக்கில்லாமல், இருவேறு வளைகோடுகளுக்காகவும் இருக்கலாம். அதாவது $\phi(x, y, p) = 0$; $\phi'_p(x, y, p) = 0$ என்னும் இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து p-க்கு இரு சம மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன. இந்த இரண்டும் அடுத்தடுத்த வளைகோடுகளுக்குப் பொருத்தமாகாமல், இருவெவ்வேறுவளைகோடுகளுக்குப் பொருத்தமானல் அத்தகைய நியமப்பாதையை "டாகலோகஸ்" (Tac locus). T-நியமப்பாதை என்று கூறுவோம் (T).

கெய்லி என்பவர் p-தன்மை காட்டியில் ET^2C என்ற நியமப் பாதைகள் உள்ளன என்று நிரூபித்துள்ளார். முடிவாகக் கூறின்,

$$p\text{-தன்மை காட்டி} = ET^2C \qquad (72)$$

தழுவியானது p-மற்றும் c-தன்மை காட்டிகள் இரண்டிலும் பங்கு பெறுகிறது; T-நியமப்பாதை p-தன்மை காட்டி மட்டிலும், N-நியமப்பாதை c-தன்மைகாட்டி மட்டிலும் பங்கு பெறும். c-நியமப்பாதை அல்லது கூர்புள்ளி நியமப்பாதையும் இரு தன்மை காட்டிகளிலும் இடம் பெறும். மற்றும் தழுவி வகைக்கெழு சமன் பாட்டிற்கும், தீர்வாக இருக்கும். (அது அதன் சிறப்புத் தீர்வாக இருக்கும்). ஆனால், N, C, T நியமப்பாதைகள் வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வாக இருக்காது.

p-ல் ஒரு இருபடி சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$p^2L - 2pM + N = 0 \qquad \text{(i)}$$

இங்கு L, M, N என்பவை x, y மாறிகளின் சார்பலன்கள்; ஒவ்வொன்றும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை.

$$P\text{-க்குத் தீர்க்க} \quad p = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - LM}}{L} \qquad \text{(ii)}$$

என்ற இருதீர்வுகள் கிடைக்கின்றன.

(a) $M^2 < LN$, என்றால் p-ன் மதிப்புகள் கற்பனையானவை. எனவே வளைகோடே இந்தப் பகுதியில் கிடையாது.

(b) $M^2 > LN$, என்றால், x, y களுக்கு இரு தனித்தனி மதிப்புகள் கிடைக்கும். எனவே ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வளை கோட்டிற்கு இரு தனித்தனியான கிளைகள் இருக்கும்.

(c) $M^2 - LN = 0$ அதாவது p-ன் இரு மதிப்புகள் சமமாகும்.

$L = l_0 + l_1x + l_2y \dots\dots;\ M = m_0 + m_1x + m_2y \dots\dots;$

$N = n_0 + n_1x + n_2y + \dots\dots$ என்போம். அந்த வளை கோட்டின் மேலுள்ள 0-என்ற ஒரு புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றினால்,

$$M^2 - LN = (m_0^2 + l_0n_0) + 2m_0(m_1x + m_2y) + \dots\dots$$

$$- l_0(n_1x + n_2y) - n_0(l_1x + l_2y) \dots\dots$$

இங்கு $m_0^2 - l_0n_0 = 0$ ஆகும்.

எனவே இந்த வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் தொடுகோடு $2m_0m_1 - l_0n_1 - n_0l_1)x + (2m_0m_2 - l_0n_2 - n_0l_2)y = 0$ அல்லது $ay + by = 0$ என்பதாகும்.

இப்பொழுது இந்தப் புள்ளியினூடே செல்லும்பொழுது $M^2 - LN$ என்பதன் குறி (sign) மாறும் என்று கொள்வோம். அப்பொழுது a, b இரண்டில் ஒன்று கூட பூச்சியமாக இருக்க முடியாது. அப்பொழுது,

$$p = \frac{(m_0 + m_1 x + m_2 y + \ldots\ldots) \pm \sqrt{ax + by + \ldots \ldots}}{l_0 + l_1 x + l_2 y}$$

இது தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம். முதல் தோராயம் $y = \frac{m_0}{l_0} x$. இரண்டாவது தோராயத்தை $y = \frac{m_0}{l_0} x + Y$ என்று எழுதலாம். இங்கு x-மாறியின் முதல்படிக்கும் அதிகமான படியுள்ள உறுப்புகள் இருக்கும்.

எனவே $\frac{dY}{dx} = \pm\ dx^{\frac{1}{2}} \ldots$ என்று வருகிறது.

அதாவது $Y = \pm \frac{2}{3} \alpha\ x^{\frac{3}{2}} \ldots \ldots$

அல்லது $y = \frac{m_0 x}{l_0} \pm \frac{2}{3}\ \alpha\ x^{\frac{3}{2}}$

அதாவது குறித்த வளைகோட்டிற்கு அந்தப் புள்ளி ஒரு கூர்புள்ளியாகும்.

அடுத்து $-\frac{a}{b} = \frac{m_0}{l_0}$ என்றால் இந்த வளைகோடு, குறித்த வளைகோடுகளைத்தழுவியவாறேசெல்லும். அதாவது, இது அவைகளின் தழுவியாகும்.

முடிவாக, $M^2 - LN$ என்பது பூச்சியமாகும்; ஆனால் அதன் குறி மாறாது என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது $M^2 - LN = (ax + by)^2 + \ldots$ எனலாம்.

அப்பொழுது $p = \frac{m_0 + m_1 x + m_2 y + \ldots \pm \sqrt{(ax + by)^2}}{l_0 + l_1 x + l_2 y + \ldots}$

அல்லது $y = \frac{m_0}{l_0}\ x + (\alpha \pm \beta) x^2 \ldots\ldots$

எனவே இங்கு இரண்டு தனித்த வளைகோடுகள் ஒன்றை ஒன்று தொடும். இதனைத்தான் T-நியமப்பாதை என்கிறோம். இதன் தோராயம் $(ax+by)^2$ ... என்று இருப்பதால், p-தன்மை காட்டியில் T-நியமப்பாதை இருபடி வடிவில் காணப்படும்.

எ. கா. 15.

$xp^2 - (x-a)^2 = 0$ என்பதனைத் தீர்த்து, p மற்றும் c-தன்மை காட்டிகளைக் கண்டுபிடித்து, அவைகளிலுள்ள நியமப் பாதைகளை வகைப்படுத்து. (பல்கலைக்கழகத் தேர்வுக் கணக்கு)

$$\phi(x, y, p) = xp^2 - (x-a)^2 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = 0 \text{ என்றால் } 2px = 0 \text{ அதாவது } x = 0$$

அல்லது $p = 0$.

$p = 0$ என்று வைத்தால் $(x-a)^2 = 0$ என்று கிடைக்கிறது இதனைப் பிறகு ஆராய்வோம்.

அதாவது, p-தன்மை காட்டி $= x(x-a)^2$ என்பது ...(A)
வகைக்கெழு சமன்பாட்டைத் தீர்க்க,

$$p^2 = \frac{(x-a)^2}{x} \text{ அல்லது } y + c = (\pm \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{x})$$

அல்லது $\frac{3}{2}(y+c) = \pm\sqrt{x}\,(x-3a)$

அல்லது $\frac{9}{4}(y+c)^2 = x(x-3a)^2$ ...(B)

இதுதான் பொதுத்தீர்வு (Common Solution).

c-தன்மைக் காட்டியைக் கணக்கிட

$$f(x, y, c) = \tfrac{9}{4}(y+c)^2 - x(x-3a)^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = 2 \cdot \frac{9}{4}(y+c) = 0, \text{ அல்லது } y = -c$$

எனவே $x(x-3a)^2 = 0$ என்பது c-தன்மைக்காட்டி ...(C)

c-மற்றும் p-தன்மைகாட்டிகளுக்குப்பொதுவான $x = 0$ என்ற நியமப்பாதை தழுவியாகும்.

$x = 3a$ என்றால் $y = -c$

$(3a, -c)$ புள்ளியில் வளைகோட்டின் சாய்வைக் கண்டுபிடிப்போம்.

(B)-ஐ x-ஆல் வகையிட,

$$2 \cdot \frac{9}{4}(y + c) \cdot \frac{dy}{dx} - 2x(x - 3a) + (x - 3a)^2 = 0$$

எனவே $(3a, -c)$ புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பு கிடைக்கிறதில்லை.

மறுபடியும் வகையிட,

$$\frac{9}{4}(y + c)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{9}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (2x - 3a) + 2(x - 3a) = 0$$

இங்கு $x = 3a$, $y = -c$ என்று பிரதியிட

$\frac{9}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3a = 0$. அல்லது $(3a, -c)$ என்பது ஒரு கணுப்புள்ளி.

அதாவது $x = 3a$ என்பது கணுப்புள்ளியின் நியமப்பாதை.

இப்பொழுது $x = a$ என்ற நியமப்பாதையை கவனிப்போம். இது (72)-ன் படிக்கு T-நியமப்பாதை. அதாவது இரு தனித்த (அடுத்தடுத்து இல்லாத—nonconsecutive) வளைகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளிகளின் நியமப் பாதையாகும்.

$x = a$ என்றால் வளைகோடு கூட்டத்தின் சமன்பாடு

$\frac{9}{4}(y + c)^2 - 4a^3 = 0$ என்றுகிறது. [B-ஐப் பார்க்க]

அல்லது $y = c + \frac{4}{3}a\sqrt{a}$

இப்பொழுது c-க்கு c_1, c_2 என்ற இரு மதிப்புகளை எடுத்துக் கொண்டால் கூட்டத்தின் இரு தனித்த வளைகோடுகள் கிடைக்கும். இவையிரண்டும் $(a, 0)$ என்ற புள்ளியில் ஒன்றையொன்று தொடு

கின்றன என்று காட்ட வேண்டும். அதாவது, அந்த இரண்டு வளைகோடுகளுக்கும் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்புகள் சமமாக இருக்கவேண்டும். $c_1 \neq c_2$ என்னும்பொழுது $y = c_1 + \frac{4}{3} a\sqrt{a}$, $y = c_2 + \frac{4}{3} a \sqrt{a}$ என்ற இருவளைகோடுகளுக்கும்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} a \sqrt{a}$$ என்றே வருகிறது. எனவே $x = a$

என்ற நியமப்பாதையிலுள்ள எல்லா புள்ளிகளிலும் வளைகூட்டத்தின் இரு தனித்த வளைகோடுகள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன. முடிவாக, $x = 0$ என்பது தழுவி (அல்லது சிறப்புத் தீர்வு)

$x = a$ என்பது T-நியமப்பாதை

$x = 3a$ என்பது N-நியமப்பாதை அல்லது கணுப் புள்ளி நியமப்பாதை

எ. கா. 16.

$xp^2 + (y - 3x)p - 3y = 0$ என்பதன் p-தன்மைக் காட்டியை கண்டுபிடித்து வகைப்படுத்து.

$$F(x, y, p) = xp^2 + (y - 3x)p - 3y = 0$$

$$F_p = 2px + y - 3x = 0$$

இரண்டிலிருந்தும் p-ஐ விலக்க ; $p = \frac{3x - y}{2x}$

எனவே p-தன்மைகாட்டி

$$x \frac{(3x - y)^2}{4x^2} + \frac{(y - 3x)(3x - y)}{2x} - 3y = 0$$

$(3x - y)^2 - 2(3x - y)^2 - 12xy = 0$, $(y - 3x)^2 + 12xy = 0$ அல்லது $(y + 3x)^2 = 0$ என்று வருகிறது.

கெய்லியின் நிபந்தனையின்படிக்கு (72) $y + 3x = 0$ என்பது T-நியமப்பாதையாகும்.

எ. கா. 17.

$(x^2 - a^2)p^2 - 2xyp - x^2 = 0$ என்பதன் p, c தன்மை காட்டிகளைக் கண்டுபிடித்து அவைகளில் அடங்கியுள்ள நியமப் பாதைகளை விளக்குக. [ப.தே. க.]

$$F = (x^2 - a^2)p^2 - 2xyp - x^2 = 0$$

இதனை y-க்குத் தீர்க்க.

$$y = \frac{(x^2 - a^2)p^2 - x^2}{2xp}$$

இதை x-ஆல் வகையிட,

$$p = \frac{2xp\left[(x^2 - a^2)2p.\frac{dp}{dx} + p^2 \cdot 2x - 2x\right] - \left[(x^2 - a^2)p^2 - x^2\right]\left[2x\frac{dp}{dx} + 2p\right]}{4x^2p^2}$$

$$2x^2p^3 = \frac{dp}{dx}\{2xp^2(x^2 - a^2) - x(x^2 - a^2)p^2 + x^3\}$$
$$+ xp[2xp^2 - 2x] - p^3(x^2 - a^2) + px^2$$

$$= x\frac{dp}{dx}\{x^2 + x^2p^2 - a^2p^2\} + p\{2x^2p^2 - 2x^2 - p^2x^2$$
$$+ a^2p^2 + x^2\}$$

அதாவது

$$x\frac{dp}{dx}(x^2 + x^2p^2 - a^2p^2) + p(-x^2 - x^2p^2 + a^2p^2) = 0$$

அல்லது $\left(x\frac{dp}{dx} - p\right)\left(x^2 + x^2p^2 - a^2p^2\right) = 0$ என்று வருகிறது. (A)

$x\frac{dp}{dx} - p = 0$ ஆனால் $p = cx$, இதனை கொடுத்தச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$(x^2 - a^2)\, c^2x^2 - 2x^2yc - x^2 = 0$

அல்லது $x^2\,[c^2x^2 - a^2c^2 - 2cy - 1] = 0$

எனவே வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு

$c^2x^2 - a^2c^2 - 2ay - 1 = 0$ என்பது.

c-தன்மைக் காட்டியைக் கணக்கிடுவோம்.

$$\phi = c^2x^2 - a^2c^2 - 2cy - 1 = 0$$

$\dfrac{\partial\phi}{\partial c} = 2c\,(x^2 - a^2) - 2y = 0$ என்றால் $c = \dfrac{y}{x^2 - a^2}$

எனவே $\dfrac{y^2\,(x^2 - a^2)}{(x^2 - a^2)^2} - 2y\,\dfrac{y}{(x^2 - a^2)} - 1 = 0$

$$= \frac{y^2 - 2y^2}{x^2 - a^2} - 1 = 0$$

$x^2 - a^2 + y^2 = 0$ என்பதுதான் c-தன்மை காட்டி.

p-தன்மை காட்டியைக் கணக்கிட,

$$F = (x^2 - a^2)\,p^2 - 2xy\,p - x^2 = 0$$

$\dfrac{\partial F}{\partial p} = 2p\,(x^2 - a^2) - 2xy = 0$ அல்லது $p = \dfrac{xy}{x^2 - a^2}$

இதனை $F = 0$-ல் பிரதியிட, $x^2y^2 - 2x^2y^2 - x^2\,(x^2 - a^2) = 0$

அல்லது $x^2\,(x^2 + y^2 - a^2) = 0$

எனவே இங்கு $x = 0$ என்பது இருபடித்தானதாகவும். $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்பது ஒரு படித்தானதாகவும் கிடைக்கிறது.

எனவே $x = 0$ என்பது T-நியமப்பாதை

$x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்பது தழுவி.

குறிப்பு : (A)யிலுள்ள $x^2 + x^2p^2 - a^2p^2 = 0$ என்று எடுத்துக் கொண்டு p-ஐ விலக்க $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்ற சிறப்பு மூலம் கிடைக்கிறது.

எ. கா. 18.

$y = 3px + p^{-1}y^{-1}$ என்பதைத் தீர்த்து, அதன் தழுவியைக் கண்டுபிடி.

முதலில் $y^3 = Y$ என்று பிரதியிடுவோம்.

x-ஆல் வகையிட, $3y^2p = \frac{dy}{dx} = P$, என்போம்.

இந்த P-ன் மதிப்பை கொடுத்தச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$y = \frac{px}{y^2} + \frac{3y^2}{p} \cdot \frac{1}{y^3}$$

$$y^3 = Y \quad \text{என்று பிரதியிட} \quad Y = Px + \frac{3}{p} \qquad (A)$$

இது கிளேரோவின் சமன்பாடானதால்.

$Y = Cx + \frac{3}{c}$ என்பது பொதுத்தீர்வு.

சிறப்புத் தீர்வைக் காண (A)-ஐ x-ஆல் வகையிடுவோம்.

$$P = p + x.\frac{dp}{dx} - \frac{3}{p^2} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{3}{p^2}\right) = 0 \quad \text{அல்லது} \quad P^2 = \frac{3}{x}$$

இதனை (A)-ல் பிரதியிட

$$Y = x\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} + \sqrt{3}\sqrt{x}$$

$Y^2 = 12x$ அல்லது $y^6 = 12x$ தான் தழுவியும் சிறப்புத் தீர்வும்.

§ 7·9. செங்குத்து வீசுகோடுகள் (Orthogonal Trajectories)

$F(x, y, a) = 0$, $f(x, y, b) = 0$ என்பவை இரு வளைகோடு கூட்டங்கள். ஒவ்வொன்றும் ஒரு தனி அலகின் சார்பலனகும்.

a-அலகைக் கொண்ட கூட்டத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும், b-அலகைக் கொண்ட கூட்டத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பு வளை கோட்டையும் ஒரு குறிப்பிட்ட நிபந்தனை படிக்கு வெட்டுமானால் அவைகளை வீசுவளைகோடுகள் என்போம். ஒவ்வொரு கூட்டமும், மற்ற கூட்டத்தின் வீசுகோடாகும்.

"இரண்டும் ஒன்றேடொன்று செங்குத்தாக வெட்ட வேண்டும்" என்பது நிபந்தனையானல், அவைகளைச் செங்குத்து வீசுகோடுகள் என்று கூறுவோம்.

பொது அச்சு வட்டங்களில் (coaxial circles) இத்தகை வீசு கோடுகள் உள்ளத்தைக் காணலாம். இருபுள்ளிகளினூடே செல்லும் ஒரு பொது அச்சு வட்டங்களுக்கு அதே புள்ளிகளை எல்லைப்புள்ளிகளாக (limiting points) கொண்ட மற்றொரு பொது அச்சு வட்டங்கள் வீசுகோடுகளாகும் என்பதனைக் காணலாம்.

எ. கா. 19.

$x^2 + y^2 + 2ay - k^2 = 0$ என்பது ஒரு பொது அச்சு வட்டக் கூட்டம். இவைகள் எல்லாம் $(\pm k, 0)$ என்ற இருபுள்ளிகளினூடே செல்லும்.

$x^2 + y^2 - 2bx + k^2 = 0$ என்பது மற்றொரு பொது அச்சு வட்டங்கள். இவைகளின் ஆரை $= \sqrt{b^2 - k^2}$. எனவே $(\pm k, 0)$ என்பவை இவைகளுக்கு எல்லைப் புள்ளிகள்.

இவ்விரண்டு கூட்டங்களும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன.

[குறிப்பு: $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1 y + c_1 = 0$, மற்றும்

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ இரண்டும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்ட நிபந்தனை

$2(g_1g_2 + f_1f_2) = c_1 + c_2$ என்பதாகும்.]

§ 7·10. செங்குத்து வீசுகோடுகளுக்கான நிபந்தனைகள் :

A. **கார்ட்டீஸியன் முறையில்.**

முதல் கூட்டமான $F(x, y, a) = 0$ என்பதன் தொடுகோட்டின் வகைக்கெழு சமன்பாட்டை $\phi\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ என்று எழுத

லாம். மற்றொரு கூட்டத்திற்கு இது வீசுகோடாகுமானல், $\frac{dy}{dx}$-ஐ $\left(-\frac{1}{dy/dx}\right)$ ஆல் பிரதியிட வேண்டும். அப்பொழுது அதன் வகைக்கெழு சமன்பாடு $\phi\left(x, y, \frac{-dx}{dy}\right) = 0$ என்பதாகும். இதனைத் தீர்க்கக் கிடைக்கும் சமன்பாடுதான் முதல் கூட்டத்தின் வீசுகோடுகளின் சமன்பாடாகும்.

B. **போலார் முறையில்**

$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$ என்பதனை அறிவோம். ஒரு கூட்டத்தின் ϕ-யும், அதன் வீசு கூட்டத்தின் ϕ' உம் $\tan\phi = -\cot\phi'$ என்ற சமன்பாட்டின்படி இருந்தால் அவை இரண்டும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டும்.

எனவே $f(r, \theta, c) = 0$ என்பதன் வகைக்கெழுசமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்து, அதில் $\frac{r\,d\theta}{dr}$ என்பதற்கு $\frac{-1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}$ என்று பிரதியிட்டால் இரண்டாம் கூட்டத்தின் வகைக்கெழு சமன்பாடு கிடைக்கும். அதனைத் தீர்க்க, செங்குத்து வீசகோடுகளின் சார்பலன் கிடைக்கும்.

எ. கா. 20.

$a^{n-1}y = x^n$ என்பதன் செங்குத்து வீசுகோடுகளைக் கண்டுபிடி.

x-ஆல் வகையிட, $a^{n-1}\frac{dy}{dx} = n\cdot x^{n-1}$

அல்லது $a^{n-1} = \frac{nx^{n-1}}{y'}$

எனவே $y\cdot nx^{n-1} = x^n\frac{dy}{dx}$ என்பது கூட்டத்தின் வகைக்கெழு சமன்பாடு. இதனை எளிதாக்க

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ny}{x}$$

இப்பொழுது $\frac{dy}{dx}$-க்கு பதிலாக $-\frac{1}{dy/dx}$ என்று பிரதியிட வேண்டும்.

அப்பொழுது செங்குத்து வீசு கோட்டின் வகைக்கெழு சமன்பாடு $ny\frac{dy}{dx}+x=0$ என்பதாகும்.

இதனைத் தீர்க்க $ny^2+x^2=c$ என்று வருகிறது. இது தான் செங்குத்து வீசுகோட்டின் சமன்பாடு.

எ. கா. 21.

$r^2=A\cos\theta$ என்ற கூட்டத்தின் செங்குத்து வீசுகோடுகள் $r=B\sin^2\theta$ என்று காட்டு.

$r^2=A\cos\theta$ என்பதனை வகையிட

$2r\frac{dr}{d\theta}=-A\sin\theta$. எனவே $A=\frac{-2rdr}{\sin\theta\, d\theta}$ இதனை வீசு கோட்டுச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$r^2=\frac{-2r\,dr\cos\theta}{d\theta\sin\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{-r\sin\theta}{2\cos\theta}$$

இப்பொழுது $\frac{rd\theta}{dr}$ என்பதற்குப் பதிலாக $\frac{-dr}{rd\theta}$ என்றுபிரதியிட வேண்டும். அல்லது $\frac{d\theta}{dr}=-\frac{dr}{r^2d\theta}$ என்று பிரதியிட வேண்டும்.

எனவே $\frac{-dr}{r^2d\theta}=\frac{2\cos\theta}{-r\sin\theta}$

அல்லது $\frac{dr}{r}=\frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta}$

தொகைக் காண (Integrating)

$$\log Cr = \int \cot \theta \, d\theta = 2 \log (\sin \theta)$$
$$Cr = \sin^2 \theta$$

அதாவது $r = B \sin^2 \theta$ என்பது விடை.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளுக்குத் தழுவிகளைக் கண்டுபிடி.

1. $x^5 + (y-\beta)^2 = k^2$ [இங்கு β மாத்திரம் துணையலகு]
2. $(x-t)^2 + y^2 = r^2$] ,, t ,, ,,]
3. $(x - \alpha)^2 + (y + \alpha^2) = \alpha^2 ...$
4. $y = kx + \sqrt{k^2 a^2 + b^2}$ (k-துணையலகு)
5. $x^2 = 4t\,(y - t)$
6. $4\,(x - t)^2 + (2y - t)^2 = t^2$
7. $x \cos^3\theta + y \sin^3\theta = a$ (θ-துணையலகு)
8. $y = ax + \frac{a}{c}$ (c-துணையலகு)
9. $ty = x + t^3$
10. $y = mx + m^4$
11. $x \cos^n\theta + y \sin^n\theta = 10$
12. $y^2 = (x + c)^3$

13. குறித்த நீளமுள்ள ஒரு இரும்புகம்பி தன் இருமுனைகளும் இரு அச்சுகள் மேலுள்ளவாறு சரிகிறது. அதன் தழுவி என்ன? (M.Sc. '64)

14. $(x - c)^2 + y^2 = (x - c)^3$ என்பதற்குத் தழுவி இல்லை என்று காட்டு.

15. ஒரு வளைகோட்டின் செங்கோட்டினுடைய தழுவியானது அந்த வளைகோட்டின் வளைவு மையப்பாதையென்று காட்டு.

16. ஆரைத்திசையிகளை விட்டமாக வைத்து வரையப்படும் வட்டங்களின் தழுவி, வளைகோட்டின் முதற்படி பாதவளைகோடு என்று காட்டு.

17. ஒரு நீள்வளைய கூட்டத்தின் அரை அச்சுகளான a, b என்பவை $ab = c^2$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளின் தழுவியைக் கண்டுபிடி.

18. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்பதன் தழுவி $xy = k^2$ என்றால் a, b களிடையே உள்ள நிபந்தனை என்ன ?

19. $\frac{x^3}{a^2\cos\theta} + \frac{y^3}{b^3\sin\theta} = 1$ (θ-துணையலகு) என்பதின் தழுவி $x^3/a^2 + y^2/b^2 = 1$ என்று காட்டு.

20. $\frac{a^2\cos\theta}{x} - \frac{b^2\sin\theta}{y} = \frac{c^2}{a}$ (θ-துணையலகு) என்பதன் தழுவி $a^4/x^2 + b^4/y^2 = c^4/a^2$ என்று காட்டு.

21. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற வளைகோட்டின் ஆரைத்திசையிகளை அச்சாகக் கொண்டு, துருவத்தில் கூர்புள்ளிகளையுடைய நெஞ்சுவளைகளின் தழுவி $r^{\frac{1}{4}} = (2a)^{\frac{1}{4}}\cos(\theta/4)$ என்று காட்டு.

22. $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மேல் தங்கள் மையத்தைக் கொண்டதும், ஆதியினூடே செல்கிறதுமான வட்டக் கூட்டத்தின் தழுவியைக் கண்டுபிடி.

23. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் இரட்டை நிலை தூரத்தை (Double ordinate) விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் தழுவி மற்றொரு சமமான பரவளைய மென்றும், அதன் குவியம் முதல் பரவளையத்தின் உச்சியிலிருக்கும் என்றும் காட்டு.

24. $y^2 = 8x - 16$ என்ற வளைகோட்டிற்குத் தொடு கோட்டைக் கண்டு பிடித்து, அதன் தழுவியைக் கண்டுபிடி.

25. $bx - ay\sin\theta = ab\sec\theta - ab\sin\theta\tan\theta$ (θ-துணையலகு) என்ற நேர்கோட்டைத் தொடுகோடாக உள்ள ஒரு வளை கூட்டத்

தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்து, அதன் வளைவுமையப் பாதையைக் கண்டுபிடி.

26. $x^2 = 2y + 6$ என்ற வளைகோட்டின் தழுவி $27x^2 = 8(y + 2)^3$ என்று காட்டு.

27. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற நேர்கோட்டின் தழுவியைக் கீழ்க் கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு உட்படுத்திக் கண்டுபிடி.

(a) $a + b = 5$ (b) $a^3 + b^3 = k$ (c) $a^m b^n = k^{m+n}$

(d) $a^2 + b^2 = k^2$ (e) $a^m + b^m = c^m$.

28. $(x/a)^{\frac{1}{2}} + (y/b)^{\frac{1}{2}} = 1$ என்ற பரவளையத்தின் தழுவிகளை (i) $ab = c^2$ (ii) $a + b = c$ என்னும் பொழுது கண்டு பிடித்து அவைகள் முறையே ஒரு அதிபரவளையம் என்றும், (அச்சுகளை தொடுகோடுகளாகக் கொண்டவை), ஒரு அஸ்ட்ராய்டு (Astroid) என்றும் காட்டு.

29. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{\frac{2}{3}}$ என்பதின் செங்கோட்டை $x \sin\phi - y \cos\phi + a \cos 2\phi = 0$ என்று எழுதி அதன் தழுவியைக் கண்டுபிடி.

30. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ என்னும் வளையத்தின் ஒரு ஜோடி அரைதுணையிய விட்டங்களின் (Semi Conjugate diameter) நுனிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் தழுவியைக் கணக்கிடு.

31. $x/a + y/b = 1$ என்பதன் தழுவி (i) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$ ஆனால் a, b-களிடையே உள்ள நிபந்தனை என்ன ?

32. $c^2(y - a)^2 + (cx - a^2)^2 = (a^2 + c^2)^2$ என்ற சமன்பாட்டில் a-ஐ துணை அலகாகக் கொண்ட வட்டங்களின் தழுவி ஒரு நேர்கோடும் மற்றும் ஒரு வட்டமும் என்று காட்டு.

33. ஒரு நீள்வட்டத்தின் ஆரைத் திசையிகளை விட்டங்களாக வைத்து வட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. அவைகளின் தழுவி $r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$ என்று காட்டு.

34. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்பதன் ஆரைத்திசையிகளுக்குச் செங்குத்தாக நேர்கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. அவைகளின் தழுவி என்ன ?

35. $r^n = a^n \cos n\theta$ என்பதன் ஆரைதிசையிகளுக்குச் செங்குத்தான நேர்கோடுகளின் தழுவி என்ன ?

36. $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ என்பதன் ஆரைத்திசையிகளுக்குச் செங்குத்தான நேர்கோடுகளின் தழுவி என்ன ?

37. $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டக் கூட்டங்களுக்குத் தழுவி இல்லை என்று காட்டு.

38. $(x/a)^m + (y/b)^m = 1$ என்ற வளைகோட்டின் தழுவியை $a^p + b^p = c^p$ என்ற நிபந்தனைக்குக் கீழ் கண்டுபிடி. m, p இவைகளின் பல மதிப்புகளுக்கு வரும் விடைகளைக் கூர்ந்து நோக்கு.

39. ஆதியிலிருந்து ஒரு துகள் (particle), θ-என்னும் ஏற்றக் கோணத்துடனும், எறியப்பட்டால், அதன் நியமப்பாதை, $y = x\tan\theta - \frac{x^2}{4h} \cdot \sec^2\theta$ என்று காட்டு. [h-ஒரு மாறிலி] θ என்பதனைத் துணை அலகாக வைத்து இதன் தழுவி $x^2 = 4h(h-y)$ என்று காட்டு.

40. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் இரட்டைக் குத்துக்கோடுளின் மேல் அவைகளை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் வரையப்பட்டால் அவைகளின் தழுவி என்ன ?

41. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் இரட்டைக்குத்துக் கோடுகளின் மேல் அவைகளை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் வரையப்பட்டால் அவைகளின் தழுவி என்ன ?

42. $y = mx^3$ என்ற வளைகோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு அச்சுகளுக்கு PM, PN என்ற குத்துக்கோடுகள் வரையப்பட்டன. MN-ன் தழுவி என்ன ?

43. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு அச்சுகளுக்கும் குத்துக்கோடு, PM, PN வரையப்பட்டன. MN-ன் தழுவி என்ன ? (M.Sc. '67)

44. $alx + bmy + cnz = 0$ ஒரு தளம். இங்கு a, b, c என்பவை மாறிலிகள் ; l, m, n என்ற துணை அலகுகளை கீழ்வரும் இரு நிபந்தனைகள் கட்டுப்படுத்துகின்றன. (i) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

(ii) $alx_1 + bmy_1 + cnz_1 = 1$. அப்பொழுது அந்தத் தளத்தின் தழுவி $(S-1)(S_1-1) = (T-1)^2$ என்று காட்டு.

இங்கு $S = \Sigma a^2 x^2$, $S_1 = \Sigma a^2 x_1^2$, $T = \Sigma a^2 x x_1$.

[Hint (யோசனை)]: மூன்று சமன்பாடுகளையும் p ஐ வைத்து வகையிட்டு, $\frac{dm}{dl}$, $\frac{dn}{dl}$ என்பவைகளை, தேராப் பெருக்கிகளை வைத்து விலக்கவும்.]

45. $x \cos t + y \sin t = \cos 2t$ என்பதன் தழுவியின் துணை அலகு சமன்பாடுகள் $x = \frac{-1}{2}(3\cos t - \cos 3t)$; $y = \frac{-1}{2}(3\sin t + \sin 3t)$ (என்று காட்டு.

46. $lx + my = 1$ என்ற நேர்கோட்டில், l, m, என்பவை t-என்ற துணை அலகின் சார்பலன்கள். அதன் தழுவியின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் கூறுகளை (Coordinates) l, m மற்றும் அவைகளின் வகைக் கெழுக்களின் சார்பலன்களாகக் காட்டு, தழுவியின் ஒரு புள்ளியின் வளைவு ஆரையைக் கண்டுபிடி. (l, m, மற்றும் அவைகளின்முப்படி வகைக்கெழுக்களின் சார்பலன்களாக) (M. Sc. '63)

47. கீழ்க்கண்டவைகளின் c-தன்மை காட்டியைக் கண்டு பிடித்து அதிலுள்ள நியமப்பாதைகளை வகைப்படுத்துக.

(i) $x(x+y-c) = (y-c)^3$

(ii) $y^2 - 4 = c(x+c)$

(iii) $c^3 - 3c^2x + 3cx^2 + (y-x)^2 - x^3 = 0$

(iv) $x^2 + y^2 - 2cx + \frac{3}{4}c^2 = 0$

(v) $c^2x^2 - a^2c^2 - 2cy - 1 = 0$

(vi) $x^3 - c(y+c)^2 = 0$

48. கீழ்கண்ட வகைக்கெழு சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து, p, c தன்மைகாட்டிகளைக் கண்டுபிடித்து அவைகளிலுள்ள நியமப் பாதையை விளக்கு :

(i) $y = px + p^3$ (ii) $y = px + \sqrt{p^2 - 1}$

(iii) $y = px + ap/\sqrt{1 + p^2}$

(iv) $y = 2xp + p^2$ (v) $ap^3 = 27y$

(vi) $(8p^3 - 27)\, x = 12p^2 y$

(vii) $p^2y^2 \cos^2\alpha - 2pxy \sin\alpha + y^2 - x^2 \sin^2\alpha = 0$ [ப. க. தே]

(viii) $4p^2 = 9x$ (ix) $(px - y)(x - py) = 2p$

(x) $3p^2 y^2 - 2xyp + 4y^2 - x^2 = 0$ [ப. க. தே]

(xi) $x - y = 2ap - ap^2$

(xii) $y^2 - x^2 - 2xyp + m^2 [(x + yp)^2 - a^2] = 0$

49. $(x^2 + y^2 - 2pxy)^2 = 4a^2y^2 (1 - p^2)$ என்ற சமன்பாடு $y^2 - x^2 = z$ என்று பிரதியிட்டால் கிளேரோவின் (clairaut's) சமன்பாடாக மாறிவிடும் என்று காட்டி அதனைத் தீர்வு காண்க. இதன் சிறப்புத் தீர்வு இரு செவ்வக அதிபர வளைவுகள் என்று காட்டு. [ப. க. தே]

50. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளில் α-என்பது துணைஅலகு அவைகளின் செங்குத்து வீசுகோடுகள் என்ன ?

(a) $x^3 - 3xy^2 = \alpha$ (b) $y^2 = \alpha x$

(c) $x^2 + \alpha y^2 = 0$ (d) $(x^2 - a^2) + (y^2 - b)^2 = \alpha^2$

(e) $\dfrac{x^2}{\alpha} + y^2 = \dfrac{a^2}{\alpha - 1}$ (f) $xy = \alpha (x - 1)^2$

(g) $r = \tan (\theta + \alpha)$ (h) $(r^2 + a^2) \sin\theta + 2r = 0$

(i) $r = \dfrac{\alpha}{1 + 2\cos\theta}$ (j) $r = \alpha\, (1 + 2\cos\theta)$

51. y-அச்சை ஒரு தொலைத்தொடுகோடாக கொண்டவையும், $(a, 0)$ என்ற புள்ளிகளூடே செல்பவையுமான செவ்வக அதிபர வளைகோடுகளின் செங்குத்து வீசுகோடுகளைக் கண்டுபிடி.

52. ஆதியை மையமாகக் கொண்ட, மற்றும் பேரச்சு $= 2a$ (Major axis) x-அச்சின் மேலும் கொண்ட நீள்வட்டங்களின் செங்குத்து வீசுகோடுகள் $x^2 + y^2 = 2a^2 \log | Bx |$ என்று காட்டு.

53. $(\pm a, \pm b)$ என்ற புள்ளிகளினூடே செல்லும் கூம்பு வளை களின் செங்குத்து வீசுகோடுகள் எவை ?

54. O-என்பதை பொதுவான குவியமாகவும், செவ்வகலம் $= 2l$ ஆகவும் உள்ள பரவளையங்களின் செங்குத்து வீசுகோடுகள் எவை ?

55. $y^2 = 4c(x + c)$ என்பது பொதுக் குவிய பரவளையங்கள் தன்னிசை செங்குத்து வீசுகோடு (Self orthogonal Trajectories) என்று காட்டு.

56. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 3x^2y}{x^2 + 3xy^2}$ என்றுள்ள வளைகோடுகள் எவை? அவைகளின் செங்குத்து வீசுகோடுகள் எவை?

57. $r = a(1 - \cos\theta)$ என்பவற்றின் செங்குத்து வீசு கோடுகள் $r = b(1 + \cos\theta)$ என்று காட்டு.

58. $r^m = a^m \cos m\theta$ என்பனவற்றின் செங்குத்து வீசு கோடுகள் $r = b(1 + \cos\theta)$ என்று காட்டு.

விடைகள்

1. $x = \pm k$ 2. $y = \pm r$ 3. $xy = 0$

4. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 5. $x^2 = y^2$ 6. $3y^2 - 4xy = 0$

7. $c^2(x^2 + y^2) = x^2y^2$ 8. $y^2 = 4ax$

9. $27x^2 = 8(y + 2)^3$ 10. $256y^3 + 27x^4 = 0$

11. $x^{2/_{2-n}} + y^{2/_{2-n}} = 10^{2/_{2-n}}$ 12. $y = 0$

13. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$; இங்கு கம்பியின் நீளம் $= c$.

17. $2yx = c^2$ 18. $ab = 4k^2$ 22. $r^2 = 4a^2\cos^2\theta$

24. $y^2 = 8x - 16$ 25. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

27. (a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$ (b) $x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{4}} = k^{\frac{3}{4}}$

(c) $x^m \cdot y^n = \dfrac{x^m \cdot n^n \cdot k^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$ (d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{2} = k^{\frac{2}{3}}$

(e) $x^{n/n+1} + y^{n/n+1} = c^{n/n+1}$

29. $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

30. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \frac{1}{2}$ 31. (i) $a^2 + b^2 = k^2$

(ii) $27k^2 = 4ab^2$ 34. $r = 2a\cos\theta$

35. $r^{n/1-n} = a^{n/1-n} \cdot \cos\left(\dfrac{n}{1-n}\,\theta\right)$

36. $r\sin\alpha = ae^{(\alpha - \pi/2)\cot\alpha}\, e^{\theta\cot\alpha}$

38. $x^r + y^r = c^r$; இங்கு $r = \dfrac{mp}{m+p}$

40. $x^2/(a^2+b^2) + y^2/b^2 = 1$

41. $y^2 = 4a(x+a)$ 42. $27y + 4mx^3 = 0$

47. (i) $x = 0$ கணுப்புள்ளி நியமப்பாதை

(ii) $y = 0$; T-நியமப்பாதை

(iii) $x = y$ கூர்புள்ளி நியமப்பாதை

(iv) $3y^2 - x^2 = 0$ என்பது தழுவி. $y = 0$ என்பது T-நியமப்பாதை.

(v) $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்பது தழுவி

(vi) $x^3(27x^3 + 4y^3) = 0$; இங்கு $x = 0$ என்பது கூர் புள்ளி நியமப்பாதை, மற்றது தழுவி.

48. சிறப்புத் தீர்வுகள் (i) $27y^2 + 4x^3 = 0$

(ii) $y^2 = x^2 - 1$ (iii) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

(iv) $x^2 + y = 0$ கூர்புள்ளி நியமப்பாதை; சிறப்புத் தீர்வு கிடையாது.

(v) $y = 0$ என்பது தழுவியும், கூர்புள்ளி நியமப்பாதையும்,

(vi) சிறப்புத் தீர்வு $27x^3 + 4y^3 = 0$; $x = 0$ கூர்புள்ளி நியமப்பாதை.

(vii) $y = 0$ என்பது T-நியமப்பாதை; $x = \pm x \tan \alpha$ என்பது தழுவி.

(viii) $x = 0$ என்பது கூர்புள்ளி நியமப்பாதை.

(ix) $\frac{x^2}{1+c} + \frac{y^2}{1-c} = 1$ என்பது பொதுத் தீர்வு; தழுவி $x \pm y = \pm \sqrt{2}$

(x) $y = 0$ என்பது T-நியமப்பாதை; $x = \pm 1$ என்பது கூர்புள்ளி நியமப்பாதை; $y = \pm x$ என்பது தழுவி.

(xi) $(x + c)^2 = 4a\,(y + c)$ என்பது பொதுத் தீர்வு; $y = x - a$ என்பது சிறப்புத் தீர்வு.

(xii) பொதுத் தீர்வு, $x^2 + y^2 - 2cx = m^2 \;(a^2 - c^2)$; $y = 0$ என்பது T-நியமப்பாதை; $(m^2 - 1)\,x^2 + m^2y^2 = m^4a^2$ என்பது தழுவி.

50. (*a*) $y^3 - 3x^2y = \beta$ (*b*) $y^2 + 2x^2 = \beta$

(*c*) $x^2 + y^2 - 2a \log |x| = s$

(*d*) $x^{2b}\,(y^3 - b)^c = \beta\,(x^2 - a)^b \cdot y^{2c}$.

(*e*) $\frac{x^2}{\beta} + y^2 = \frac{a^2}{\beta - 1}$ (அதே தான்)

(*f*) $y^2 + x^2 - 4x + \log(x+1)^4 = \beta$

(*g*) $r - \dfrac{1}{r} = \beta - \theta$ (*h*) $(r^2 - a^2)\cos\theta + \beta r = 0$

(*i*) $r^2\left(\sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right) = \beta$

(*j*) $r = \beta\sqrt{\sin\theta}\cdot\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

51. $3a(y^2 - x^2) + 2x^3 = \beta$

53. $a^2\log x^2 + b^2\log y^2 = \beta + x^2 + y^2$

54. $\sqrt{(2r/l) - 1} - \tan^{-1}\left(\sqrt{2(l/r) - 1}\right) = \beta \pm \tfrac{1}{2}\theta$

56. $(x^2 - y^2)^2 = cxy;\ x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = c'.$

8. வளைகோடுகளை வரைதல்

(TRACING OF CURVES)

§ 8·1. அறிமுகம்.

முன் அத்தியாயங்களில் பற்பலவளை கோடுகளை அறிந்திருக்கிறோம். சிலவற்றை வரைந்தும் உள்ளோம். இங்கு சில பொது வான விதிகளைக் கூறி, அவைகளின் உதவியால் வளைகோடுகள் வரையும் முறைகளை முதலில் விளக்குவோம். பிறகு சில முக்கிய மான வளைகோடுகளை ஆராய்வோம்.

§ 8·2. கார்ட்டீஸியன் வளைகோடுகளை வரைதல்

1. முதலாவதாக வளைகோட்டில் ஏதாவது சமச்சீர் தன்மை யுள்ளதா என்று பார்க்க வேண்டும். கீழ்க்கண்ட வழிமுறைகள் சமச்சீர் தன்மையை அறிய உதவும்.

A. வளைகோட்டுச் சமன்பாட்டிலுள்ள y-உறுப்புகள் எல்லாம் இரட்டை படித்தானவைகளானல், வளைகோடு x-அச்சில் சமச்சீராக இருக்கும். எ. கா. $y^2 - 4ax = 0$ என்ற பரவளையம் x-அச்சில் சமச்சீராக உள்ளது.

B. வளைகோட்டுச் சமன்பாட்டிலுள்ள x-உறுப்புகள் எல்லாம் இரட்டைப் படித்தானவைகளானல், வளைகோடு y-அச்சில் சமச்சீராக இருக்கும். எ.கா. $y^2 = a^2 (a^2 - x^2)$ என்பது y-அச்சில் (x-அச்சில் கூட) சமச்சீராக உள்ளது.

C. x-ஐயும், y-ஐயும் மாற்றினலும், வளைகோட்டுச் சமன்பாடு மாருமல் இருப்பின், சமச்சீர் நிலைமை $y = x$ என்ற நேர்க் கோட்டில் உள்ளது, எ. கா. $y^3 + x^3 - 3xy = 0$.

I. இவைகளே அல்லாமல் சில சமயங்களில் வேறு ஏதாவது ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்தும் சமச்சீர் நிலைமை இருக்கலாம். அதனையும் கணக்கிடமுடிந்தால் நல்லது.

II. தளத்தில் எந்த பகுதியிலாவது வளைகோட்டின் பாகம் இல்லாமல் இருக்கிறதா என்று கவனிக்கவும். பொதுவாக, x-அல்லது y-மாறிக்குத் தீர்வுகளைக் கண்டுபிடித்தால் இதனை அறியலாம்.

எ. கா.

$y^2(x-a) = x^2(x+a)$ என்ற வளைகோட்டில் $y^2 = x^2 \frac{(x^2-a^2)}{(x-a)^2}$ என்று தீர்வு காணுவோம். அப்பொழுது $x^2 < a^2$ ஆனுல் y-ன் மதிப்புகள் கற்பனையாகிவிடும். எனவே $-a < x < a$ என்ற எல்லைகளுக்குள், வளைகோடு இருக்காது.

III. ஆதி வளைகோட்டின் மேலுள்ளதா என்றும், அப்படி இருந்தால் அதன் தன்மை, அதில் தொடுகோடுகள் முதலியவற்றைக் கண்டுபிடி.

IV. வளைகோடு இரு அச்சுகளை எங்கெங்கு வெட்டுகின்றன என்று காணலாம்; அவைகளில் தொடுகோடுகளைக் கணக்கிடலாம்.

V. வளைகோடுகளின் மேலுள்ள சில புள்ளிகளை எளிதாகக் கணக்கிடமுடியுமானுல், அவைகளைக் கண்டுபிடி.

எ. கா.

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ என்ற வளைகோட்டில் $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 4)$ என்பவை எளிதாகக் கணக்கிடக்கூடிய புள்ளிகள்.

VI. வளைகோட்டிற்கு அணுகுகோடுகள் இருந்தால் அவைகளைக் கண்டுபிடித்து, வளைகோடு அவைகளையொட்டி எவ்வாறு அமைந்துள்ளது என்று அறியலாம்.

VII. dy/dx-ஐக் கண்டுபிடித்து, அது எங்கு பூச்சியமாகிறதோ அங்கு தொடுகோடு x-அச்சிற்கு இணையாகவும், எங்கு கந்தழியாகிறதோ, அங்கு தொடுகோடு y-அச்சிற்கு இணையாகவும் இருக்கும்

பொதுவாக, எந்தெந்த இடைவெளிகளில் வளைகோடு ஏறு முகமாகவும், இறங்கு முகமாகவும் இருக்கும் என்பதனைக் கண்டு பிடிக்கவும் ; இதற்கு $\frac{dy}{dx}$ உதவும்.

VIII. சிறப்புப் புள்ளிகள், அவைகளின் வகைகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

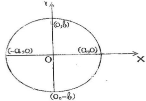
மேற்கூறப்பட்டவை பொதுவான விதிகள். ஒவ்வொரு எடுத்துக்காட்டிலும் தேவையான வற்றை மட்டும் கணக்கிட்டாலும் போதும்.

முதலில் சில எளிதான வளை கோடுகளின் வரை படங்களைக் காண்போம்.

§ 8·3. நீள் வளையம்

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 ; \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

வளைக்கோடு x-அச்சிற்கும், y-அச்சிற்கும் சமச்சீராக உள்ளது. $(\pm a, 0)$ என்ற புள்ளிகளில், தொடுகோடுகள் y-அச்சிற்கு இணையாகவும் $(0, \pm b)$ புள்ளிகளில், தொடுகோடுகள் x-அச்சிற்கு இணையாகவும் இருக்கின்றன. முதல் கால் பகுதியில் x-அதிகரிக்கும் பொழுது $\frac{dy}{dx} < 0$ ஆதலால் வளைகோடு



படம் 8·1

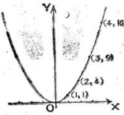
$(0, b)$-யிலிருந்து $(a, 0)$ வரை இறங்குமுகமாக இருக்கும். இந்த விளக்கங்களுடன் ஒரு வரைபடத்தை வரைவோம்.

8.4. பரவளையம்:

$x^2 = 4ay.$

வளைகோடு y-அச்சில் சமச்சீராக உள்ளது. $(0, 0)$ என்பது அதன்மேலுள்ள புள்ளி. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2a}{x} = \sqrt{a/y}$ ஆதலால், ஆதியில் தொடுகோடு x-அச்சாகும். y-அதிகரிக்கும் பொழுது $\dfrac{dx}{dy} > 0;$ எனவே வளைகோடு $0 < y < \infty$ என்ற இடைவெளியில் ஏறுமுகமாக இருக்கும்.

y-ன் மதிப்பு குறை எண்ணும் பொழுது, x-ன் மதிப்பு கற்பனை. எனவே வளைகோடு, ஒன்றும், இரண்டாம் காற்பகுதிகளில் மட்டும்தான் இருக்கும். அணுகுகோடு கிடையாது. இந்த விளக்கங்களுடன் வரைபடத்தை கீழ்கண்டவாறு வரையலாம்.



படம் 8.2.

8.5. அதிபரவளையம்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

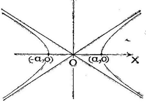
வளைகோடு இரு அச்சுகளிலும் சமச்சீராக உள்ளது. எனவே முதல் கால் பகுதியில் அதன் தன்மையை அறிந்தால், மற்ற கால் பகுதிகளிலும் அதனை வரைந்து விடலாம்.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

எனவே $x < a$ ஆனால் y-ன் மதிப்பு கற்பனை; அதாவது $(-a, a)$ என்ற இடைவெளியில் வளைகோடு கிடையாது.

அணுகுகோடுகள் $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ மற்றும் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

என்பவை. $(\pm a, 0)$ என்பவை வளைகோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகள். முதல் கால்பகுதியில், அணுகுகோட்டின் கீழ் வளை கோடுள்ளது. வரை படம் கீழ்வருமாறு.



படம் 8·3.

§ **8.6. அரைமுப்படி பரவளைவு** (Semi cubical parabola)

$$y^2 = a\,(x - b)^3$$

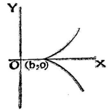
y-ன் இருபடித்தான உறுப்புகள் மாத்திரமே உள்ளதால், x-அச்சு, சமச்சீரச்சு, வளைகோடு $(b, 0)$ புள்ளியினூடே செல்கிறது. அந்த புள்ளியில் x-அச்சு தான் தொடுகோடு.

x-ன் மதிப்புகள் b-க்குக் குறைவாக இருப்பின், y-கற்பனையாகி விடுகிறது. எனவே வளைகோடு $(b, 0)$ என்ற புள்ளியின் வலது புறம் மட்டும்தான் இருக்கும்.

$$2y\,\frac{dy}{dx} = 3a\,(x - b)^2 \text{ அல்லது } \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\,\frac{a(x-b)^2}{y}$$

எனவே $x > b$, $y > 0$ என்னும்பொழுது $\frac{dy}{dx} > 0$ ஆவதால் எப்

பொழுதும் வளைகோடு ஏறுமுகமாவே இருக்கும். அணுகுகோடு கிடையாது. படம் கீழே உள்ளது.



படம் 8·4

இதன் துணை அலகு சமன்பாடுகளைக் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$y = a^2 t^3 ;\ x = b + at^2$$

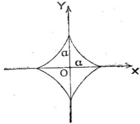
ஒரு பரவளையத்தின் வளைவு மையப்பாதையானது அரை முப்படி பரவளைவு ஆகும் என்பதை முன்பே கண்டுள்ளோம்.

§ 8·7 நான்கு கூருடைய அக உருள்வளை (Four-cusped Hypocycloid)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

இது இரு அச்சுகளிலும் சமச்சீராக இருக்கும் $(a, 0)$ $(0, a)$ என்பவை கூர்புள்ளிகள். எனவே, நான்கு கூர்புள்ளிகள் இந்த வளைகோட்டிற்கு உள்ளன. $[(\pm a, 0)\ \ (0, \pm a)]$. அந்தப் புள்ளிகளில் தொடுகோடு x, y-அச்சுகள் என்பதையும் எளிதில் காணலாம். வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளோ, அணுகுகோடுகளோ கிடையாது. $x > a$, $y > a$ என்ற இடைவெளிகளில் வளைகோடு கற்பனைதான். எனவே படத்தை வரையலாம். இதனை "அஸ்ட்ராய்ட் (astroid) என்றும் கூறுவார்கள். இதன் துணை அலகு வடிவம் $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ என்பதாகும்.

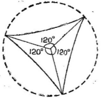
ஒரு வட்டத்தின் வட்ட வரையின் மேலேயே நழுவாமல் அத்துடன் ஒட்டினுற்போல் மற்ருெரு வட்டம் உருண்டு வருமானுல்,



படம் 8.5

அந்த உள்வட்டத்தின் பரிதியின் மேலுள்ள புள்ளியொன்றின் நியமப்பாதைதான் இந்த வளைகோடு. உள்வட்டத்தின் ஆரை வெளிவட்டத்தின் ஆரையின் கால் பங்கு ஆனுல் மேற்கண்ட வளை கோடு கிடைக்கும்.

உள்வட்டத்தின் ஆரை வெளிவட்டத்தின் ஆரையின் மூன்றிலொரு பங்கானுல், படம் 8·6 கிடைக்கும். வெளிவட்டத்தைப் புள்ளிக் கோடுகளால் காட்டியுள்ளது

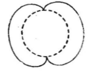


படம் 8.6

உருண்டு வரும் வட்டம் முதல் வட்டத்தின் மேற்புரத்தில் உருண்டு வருமாயின், அதன் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதை "புற உருள் வளை" (Epicycloid)-யாகும்; உருளும் வட்டத்தின் ஆரை, முதல் வட்டத்தின் ஆரைக்குச் சமமானால், படம் 8·7 (a)-யும் அதில் பாதியானால் படம் 8-7 (b)-யும் கிடைக்கும்.

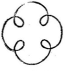


படம் 8·7 (a)

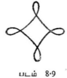


படம் 8·7 (b)

இரண்டு வட்டங்களின் ஆரைகளின் விகிதம் வெவ்வேறானால், வெவ்வேறு அழகிய வடிவமுடைய வளைகோடுகள் கிடைக்கும். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில் உருளும் வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளியொன்றின் மையப்பாதையை கணக்கிட்டுள்ளோம். அப்படி இல்லாமல், அந்த வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கும் ஒரு புள்ளியின் மையப்பாதையைக் கண்டுபிடித்தால், அதன் வடிவங்கள் புற உருள் வட்டங்கள் (Epicycles) எனப்படும். அவைகளின் சில வடிவங்களைக் கீழே தந்துள்ளோம்.



படம் 8·8



படம் 8·9

பொதுவாக புற உருள்வளை அல்லது அக உருள்வளை சமன்பாடுகளை, துணை அலகு சமன்பாடுகளாக எழுதினால்,

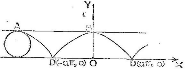
$$\left.\begin{aligned} x &= (a+b)\cos\theta \mp b\cos\left(\frac{a\pm b}{b}\,\theta\right) \\ y &= (a+b)\sin\theta \mp b\sin\left(\frac{a\pm b}{b}\,\theta\right) \end{aligned}\right\} \quad [74]$$

என்று வரும். a என்பது நிலையான வட்டத்தின் ஆரம், b என்பது உருளும் வட்டத்தின் ஆரம். உருளும் வட்டம், நிலை வட்டத்தின் மேல்புரம் உருண்டால் புற உருள்வளையங்கள் கிடைக்கும். அதற்கு [74]-ல் முதல்வரியில் குறிப்பிட்ட குறிகளை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். உள்புரம் உருண்டால் அக உருள் வளையங் கள் கிடைக்கும். அதற்கு (74)-ல் கீழ்வரியில் உள்ள குறிகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

§ 8.8 வட்டப்புள்ளியுரு அல்லது உருள்வளை (cycloid)

$$x = a\,(\theta + \sin\theta)$$
$$y = a\,(1 + \cos\theta)$$

a-என்ற ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம், குறிப்பிட்ட ஒரு நேர்க் கோட்டின் மேல் பொருந்தியவாறு உள்ளுகிறது என்போம்.



படம் 8·10

அந்த வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் மையப் பாதையை உருள்வளை என்போம். $A \cdot D$ என்பது (படம் 8·10) குறிப்பிட்ட நேர்க்கோடு. வரைபடம் அடுத்தடுத்து ஒரே வடிவ முள்ள பல பகுதிகளைக் கொண்டது என்பது தெளிவு. A-போன்ற புள்ளிகளில், வரைபடம் நேர்க்கோட்டிலிருந்து மிக அதிக தூரத்தி லுள்ளது; அத்தகைய புள்ளிகளை "உச்சி" எனலாம். D போன்ற புள்ளிகள் A-போன்றவைகளின் பாதிதூரத்தில் இருக்கும். இவைகள் நேர்க்கோட்டின் மேலேயே இருக்கும்; இவைகளைக் கூர்கள் எனலாம். இரண்டு உச்சிகளிடையேயோ, அல்லது இரண்டு கூர்களிடையேயோ உள்ள வளைகோட்டின் தூரம் 2π (உருளும் வட்டத்தின் பரிதி) ஆகும்.

இப்பொழுது θ என்பது $-\pi$-யிலிருந்து $+\pi$-வரை மாறுகிறது என்போம்.

$\theta = \mp\pi$ என்றுல் $\left.\begin{array}{l} x = \mp a\pi \\ y = 0 \end{array}\right\}$ இப்பொழுது 0-ஐ ஆதியாக

வைத்து (D, D' இரு கூர்களின் நடுப்புள்ளி), OD-ஐ x-அச்சாகவும், O-விலிருந்து OD-க்குக் குத்துக்கோட்டை y-அச்சாகவும் கருதுவோம். D', D என்பவை $(-a\pi, 0)$ $(a\pi, 0)$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கும்.

θ என்பது $(-\pi, 0)$ என்ற இடைவெளியிலிருந்தால்

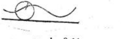
$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta) \geq 0$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta \geq 0.$$ எனவே இங்கு வளைகோடு ஏறுமுகமாக இருக்கும். $\frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}$ ஆதலால் $\frac{dy}{dx} = 0$ என்னும் பொழுது $\sin\theta = 0$ அல்லது $\theta = 0$; அதாவது $x = 0$-வில் வளைகோட்டின் பெருமம் நிகழ்கிறது, எனவே $(-\pi, 0)$ இடைவெளியில் வளைகோடு ஏறுமுகமாக இருந்து, $x = 0$,-ல் பெருமமாக, பிறகு $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் இறங்குமுகமாக, $\theta = \pi$ என்னும் பொழுது $x = a\pi$, $y = 0$ என்ற முடிவுகளை அடைகிறது. எனவே வரைபடம் (8·10)-ல் உள்ளதைப்போல், வில்வடிவம் அடுத்தடுத்து நிகழ்ந்து கொள்வதாக இருக்கும்.

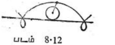
குறிப்பு : 1. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ என்று சமன்பாடுகள் இருக்குமானால், வட்டம் AB-என்ற நேர்க்கோட்டின் கீழ்புறம் உருண்டு வரும்.

2. உருளும் வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் நியமப் பாதைதான் "உருள்வளை". அப்படியில்லாமல், அந்த வட்டத்துடன் தொடர்புகொண்ட (ஆனால் நிலையான) புள்ளியின் நியமப் பாதையை "சில்லுரு" (Trochoid) என்போம். புள்ளி வட்டத்தின் உட்புறம் இருந்தால் 8·11 படம் போலவும் வட்டத்திதின் வெளிப்புறமிருந்தால், 8·12 படம் போலவும் வளைகோடு அமையும். அந்தப் புள்ளி வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து அதன் ஆரையில் k-என்ற தூரத்தில் இருப்பின், சில்லுருவின் துணைஅலகு சமன்பாடுகள் கீழ்கண்டவாறு அமையும்.

$$x = a\theta + k\sin\theta, \quad y = a + k\sin\theta$$



படம் 8·11



படம் 8·12

§ **8·9.** $y^2(a^2+x^2) = x^2(a^2-x^2)$ என்ற வளைகோடு

x மற்றும், y உறுப்புகள் எல்லாம் இரட்டைப்படித்தானவைகளாதலால், வளைகோடு இரு அச்சுகளிலும் சமச்சீராக இருக்கும். எனவே முதல் கால்பகுதியில் மட்டும் அதன் தன்மையைக் கண்டுபிடித்தால் போதும்.

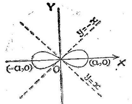
$x > a$ ஆனால் y-ன் மதிப்புகள் கற்பனை. எனவே, வளைகோடு a-க்கு வெளியே இல்லை.

(0, 0) என்பதும், $(a, 0)$ என்பதும் வளைகோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகள்.

y-க்கு தீர்வுகாண $y = \pm x \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

எனவே ஆதியில் $y = \pm x$ என்ற இரு தொடுகோடுகள் உள்ளன. அதாவது, ஆதி இந்த வளைகோட்டின் கணுப்புள்ளி.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2a^2x^2 + a^4 - x^4}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ என்று கண்டுபிடிக்கலாம்.



படம் 8.13

எனவே $\dfrac{dy}{dx} = 0$ என்றால் $x^2 = -a^2 \pm a^2\sqrt{2}$ அல்லது

$x = a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}$. எனவே இந்தப் புள்ளியில் தொடுகோடு x-அச்சிற்கு இணையாயிருக்கும். மற்றும் $x = a$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = \infty$ எனவே இங்கு தொடுகோடு y-அச்சிற்கு இணையாயிருக்கும்.

§ 8·10. டேகார்ட்டின் ஃபோலியம் என்ற வளைகோடு (Folium of Descartes).

இதன் சமன்பாடு $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

இங்கு சமச்சீர் நிலைமை $y = x$ என்ற கோட்டில் உள்ளது.

(பார்க்க § 8·2). இந்த நேர்க்கோடு வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகளைக் கணக்கிட்டால் $2ax^3 - 3ax^2 = 0$. அல்லது $x^2(2x - 3a) = 0$. ஆக x-ற்கு 0 மற்றும் $\frac{3a}{2}$ என இருமதிப்புகள் வரும். எனவே $(0, 0)$ என்பது வளைகோட்டின் இரட்டைப்புள்ளி; $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ என்பது அதன் மேலுள்ள மற்றொரு புள்ளி.

$(0, 0)$ என்பது கணுப்புள்ளியென்று எளிதில் கணக்கிடலாம்.

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$

$F_x = 3x^2 - 3ay \qquad F_{xx} = 6x. \qquad F_{xy} = -3a.$

$F_y = 3y^2 - 3ax \qquad F_{yy} = 6y$

எனவே $(0, 0)$-ல் $F_{xx} = F_{yy} = 0$, மற்றும் $F_{xy} = -3a$.

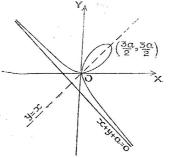
ஆக $F^2_{xy} > F_{xx} \cdot F_{yy}$......

இந்தப் புள்ளியில் தொடுகோடுகள் $x = 0, y = 0$ என்பவை

வளைகோட்டிற்கு ஒரே ஒரு மெய்யான அணுகுகோடு $x + y + a = 0$ என்று உள்ளது.

x, y இரண்டுமே குறை (Negative) ஆனால், வளைகோட்டின் வரை படம் கற்பனையாகி விடுகிறது. எனவே மூன்றும் கால் பகுதியில் வளைகோடு இருக்காது.

மற்றும், இரண்டாம் காற்பகுதியிலும், நான்காம் காற்பகுதியிலும் வளைகோடு அணுகுகோட்டின் மேலுள்ளது என்று காணலாம். இந்தத் தகவல்களைக் கொண்டு 8·14 படம் வரையப்பட்டுள்ளது.



படம் 8·14

இதன் துணை அலகு சமன்பாடுகள் கீழ்வருமாறு.

$$x = \frac{3at}{1+t^3}\ ;\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

இதைப்போலார்வடிவில் மாற்றினால், வளைகோட்டு சமன்பாடு

$$r = \frac{3a \sin\theta \cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$$ என்று வரும்.

§ 8·11. சங்கிலியம் (Catenary) :

இதன் சமன்பாடு $y = a \cosh \frac{x}{a}$ என்பதாகும் (x)-ஐ $(-x)$ ஆல் பிரதியிட, y-ன் மதிப்பு மாறுவதில்லை. எனவே வளைகோடு y-அச்சில் சமச்சீராக உள்ளது.

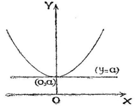
$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a}$. எனவே x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$\frac{dy}{dx} > 0$. அதாவது x அதிகரிக்கும்பொழுது, y-ம் அதிகரிக்கும்.

[$x \to \pm \infty$ என்றால், $y \to \infty$]

மற்றும் $x = 0$ என்றால் $y = a$. எனவே $(0, a)$ என்பது வளைகோட்டின் மேலுள்ளது. இந்தப் புள்ளியில் தொடுகோட்டைக் கணக்கிட

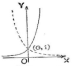
$y - a = 0$ அல்லது $y = a$. அதன்படம் கீழே உள்ளது. இதற்கு அணுகுகோடுகள், பெருமங்கள் கிடையாது.



படம் 8·15.

குறிப்பு : 1 ஒரே சீரான கனத்த சங்கிலி ஈர்ப்பு விசையால் மாத்திரம் இழுக்கப்பட்டால், அது மேற்கண்ட வடிவில்தான் நிற்கும். அதனால்தான் இந்த வளைகோட்டிற்குச் சங்கிலியம் என்று பெயர்.

குறிப்பு : 2 சங்கிலியம் ஒரு அதிபரவளைவு சார்பலன் (Hyperbolic function). மற்ற அதிபரவளைவுகளாக $\sinh x$, $\tanh x$ என்பவற்றின் வளைகோடு படங்களையும் அறிந்து வைப்பது நன்று. அதற்கும் முதலாக $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = \log x$ என்பன வற்றின் வரைபடங்கள் தெரிந்திருக்க வேண்டும். அவைகளைக் கீழே தந்துள்ளோம். வரைமுறைகளை மாணவர்களே கண்டு கொள்ளலாம்.



—— $y=e^{x}$ ன் வரை படம்

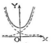
- - - $y=e^{-x}$ ன் வரை படம்

படம் 8.16



$y=\log x$

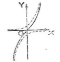
படம் 8.17



$y=\cosh x$

அதே வரைபடத்தில் $y=\frac{1}{2}e^{x}$, $y=\frac{1}{2}e^{-x}$ என்பனவற்றின் வரைபடங்களும் - - - - கோடுகளால் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

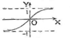
படம் 8.18



$y=\sinh x$

ஆதி ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளி

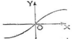
படம் 8.19



$y=\tanh x$

இரண்டு அணுகுகோடுகள் $y=\pm 1$; ஆதி வளைவுமாற்று புள்ளி

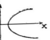
படம் 8.20



$y=\sinh^{-1} x$

இதனை 8.19-லிருந்து x, y அச்சுகளை மாற்றியமைத்துப் பெறலாம்.

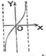
படம் 8.21



$y=\cosh^{-1} x$

இதனைப் படம் 8.18-லிருந்து x, y அச்சுகளை மாற்றியமைத்துப் பெறலாம். ஆனல் இது ஒற்றை மதிப்புள்ள சார்பலன் அன்று; அப்படி இருக்க வேண்டும் என்றால், $y>0$ என்று வைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

படம் 8.22



$y=\tanh^{-1} x$

இதனை 8.20லிருந்து x, y-அச்சுகளை மாற்றிப் பெறலாம்.

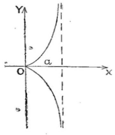
படம் 8.23

§ 8·12. $(x^2+y^2)x-ay^2=0.$ $(a>0)$ என்ற வளைகோடு (Cissoid—ஸிஸ்ஸாய்டு).

வளைகேரடு x-அச்சில் சமச்சீராக இருக்கிறது. ஆதியினூடே செல்கிறது. ஆதி ஒரு கூர்ப்புள்ளி; அங்கு தொடுகோடு x-அச்சு தான். முப்படி சார்பலனானதாலும், y^3 உறுப்பு இல்லாததாலும் y^2-ன் கெழுவைப் பூச்சியமாக்க $(x-a)=0$ என்ற அணுகுகோடு கிடைக்கிறது. இது ஒன்றுதான் மெய்யான அணுகுகோடு.

$$y^2=\frac{x^3}{a-x}$$ ஆதலால் x-குறை எண்ணாயிருக்க முடியாது;

மற்றும் $x>a$ ஆனாலும் y கற்பனையாகி விடுகிறது. எனவே வளைகோடு $0<x<a$ என்ற இடைவெளியில் மட்டுமே இருக்கும். பெருமம் சிறுமங்கள் கிடையாது. x-அதிகரிக்கும் பொழுது, y-ம் அதிகரிக்கிறது. $x\to a$ என்றால் $y\to\infty$ எனவே வரைபடம் 8·24 போல் அமையும்.



படம் 8·24

குறிப்பு: இந்த வளைகோடும் அரை முப்படி பரவளைவு கோட்டைப் (§ 8·6; படம் 8·4) போல் இருக்கும். ஆனால் அதற்கு அணுகுகோடு கிடையாது; $x\to\infty$ என்றால் $y\to\infty$ ஆகிறது. இதற்கு $x=a$ என்பது அணுகுகோடு. $x\to a$ என்னும் பொழுது $y\to\infty$ ஆகும்.

§ 8·13. $ay^2 = x(x+a)^2$ என்ற வளைகோடு $(a > 0)$

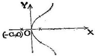
வளைகோடு x-அச்சில் சமச்சீராக உள்ளது. x என்பது $(-a, 0)$ என்ற இடைவெளியிலிருந்தால் y-கற்பனை. ஆனால் $x = -a$. என்றாலும், $x = 0$ என்றாலும் $y = 0$ ஆகிறது. எனவே $(-a, 0)$ என்பது இந்த வளைகோட்டின் மேலுள்ள ஒரு தனித்த (Isolated) புள்ளியாகும். இதனை துணையியப்புள்ளி (Conjugate point) என்றும் கூறியுள்ளோம். (பார்க்க : அத்தியாயம் : சிறப்புப் புள்ளிகள்.) $(-a, 0)$ என்ற புள்ளியின் அருகே எங்கும் வளைகோட்டுப் பகுதி கிடையாது.

$(0, 0)$ என்பது வளைகோட்டின் மேலுள்ளது ; இங்கு y-அச்சு தான் தொடுகோடு

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x+a}{2\sqrt{ax}} \; ; \; x \to 0 \text{ ஆனால் } \frac{dy}{dx} \to \infty$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3a(x-a)}{4ax \cdot \sqrt{ax}}$$

வளைவு மாற்றப்புள்ளி $x = a$ என்பது. அங்கு $y = \pm 2a$. மற்றும் அணுகுகோடுகள் கிடையாது. $x \to \infty$ ஆனால், $y \to \infty$. எனவே வரைபடம் வரையலாம். (படம் 8·25).



படம் 8·25

§ 8·14. இயல்நிலை பரவல் வளைகோடு (Normal probability curve).

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

இந்த வளைகோடு புள்ளியியல் (Statistics) துறையில் மிகவும் பயன்படும் வளைகோடாகும். இது y-அச்சில் சமச்சீராக உள்ளது.

$x \to \pm \infty$ ஆனால் $y \to \infty$ என்று வரும், x-அச்சுதான் இதற்கு உள்ள ஒரே அணுகுகோடு.

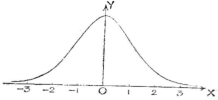
$x = 0$ என்றால், $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 3.$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad e^{-x^2/2} (-x)$ எனவே $x = 0$ தில் ஒரு பெருமம் உள்ளது.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-x^2/2} \cdot (-1) + e^{-x^2/2} \cdot x^2 \right\}$$

எனவே $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ என்றால் $x^2 - 1 = 0$ அல்லது $x = \pm 1$.

இவ்விரண்டு புள்ளிகளும், வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் (படம் 8·26).



படம் 8·26

வளைகோட்டின் மொத்தப்பரப்பில் 99 சதவிகிதம் $(-3, 3)$ என்ற இடைவெளியிலும், 95.75 சதவிகிதம் $(-2, 2)$ என்கிற இடைவெளியிலும் உள்ளதென்பது இந்த வளைகோட்டின் தனிச்சிறப்பு.

§ 8·15 $y^2 = x(x - a)(x - b)$ என்கிறவளைகோடு $(0 < a < b)$.

வளைகோடு x-அச்சில் சமச்சீரானது. $(0, 0)$, $(a, 0)$ $(b, 0)$ என்பவை அதன் மேலுள்ள புள்ளிகள். $0 < x < b$ என்னும்

பொழுது y-ன் மதிப்பு கற்பனை. எனவே இந்த இடைவெளியில் வளைகோடு இருக்காது; அதேபோல், x-ன் மதிப்பு குறையானாலும் வளைகோடு கற்பனைதான். எனவே $(0, a)$ மற்றும் $x > b$ என்ற இரு தனித்த இடைவெளிகளில் மட்டும் வளைகோடு இருக்கும். [இரு பகுதி முப்படி வளைகோடு என்று கூறலாம். (Bipartite cubic)]

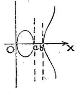
அணுகுகோடுகள் கிடையாது.

$(0, 0)$ தில் தொடுகோடு y-அச்சு, $(a, 0)$-தில் தொடுகோடு $y = a$; $(b, 0)$ தில் தொடுகோடு $y = b$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2(a + b)x + ab}{2y}$$

$x \to \infty$ என்னும் பொழுது, $\frac{dy}{dx} \to \infty$ ஆகிறது. மற்றும் y கூட $\to \infty$ ஆவதால் வளைகோடு y-அச்சிற்கு இணையானதாகும் என்று கூறலாம். (Curve will be parallel to the x-axis as $x \to \infty$).

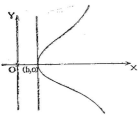
மற்றும் $\frac{dy}{dx} = 0$ என்றால் x-ற்கு இரண்டு மூலங்கள் கிடைக்கும். அதாவது இரு இடங்களில், வளைகோட்டிற்கு, சிறுமப் பெருமங்கள் நிகழும். அவை $x = 1/3\,[(a + b) \pm \sqrt{a^2 + b^2 + ab}\,]$ என்பவை. மூலக் குறியின் அடியிலுள்ள தொகுதி $< (a + b)^2$ ஆதலால், ஒரு மூலம் மிகை, மற்றொன்று குறை. மிகை மூலத்தில் பெருமமும், குறை மூலத்தில் சிறுமமும் நிகழ்கின்றன.



படம் 8·27.

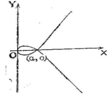
$(0, a)$ இடைவெளியில் ஒரு முட்டை உருவும் (oval shape), b-க்கு பிறகு கந்தழிக்குச் செல்லும் பிரிவும் உள்ள படம்.

குறிப்பு 1. $a = 0$ ஆனால், $(0, 0)$ என்பது ஒரு தனித்த புள்ளியாகிவிடும். அப்பொழுது $y^3 = x^3(x - b)$ என்பது சமன்பாடு.



படம் 8·28

2. $a = b$ ஆனால் சமன்பாடு $y^2 = x(x - a)^2$ என்றாகும். $(a, 0)$ என்பது ஒரு கணுப்புள்ளி : வரைபடம் 8·29-ல் உள்ளது.



படம் 8·29

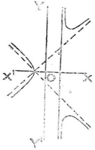
§ 8·16. $y^2(x - a) = x^2(x + a)$ என்ற வளைகோடு

வளைகோடு x-அச்சில் சமச்சீராக உள்ளது. $(-a, 0)$ என்பதுதான் அதன் மேலுள்ள ஒரு எளிதான புள்ளி. இங்கு $x = -a$ என்பது தொடுகோடு.

இப்பொழுது அணுகுகோடுகளைக் கண்டுபிடிப்போம். முப்படி சமன்பாடானதால் மூன்று அணுகுகோடுகள் இருக்கலாம்.

y^3-உறுப்புகள் இல்லாததால், y^2-ன் கெழுவை பூச்சியமாக்க $x - a = 0$ என்பது ஒரு அணுகுகோடு.

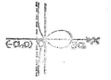
மற்ற இரண்டு அணுகுகோடுகள் $y = \pm (x + a)$ என்பவை: இந்த விவரங்களுடன் கீழ்கண்ட வரைபடம் வரையலாம்.



படம் 8·30

வளைகோடு மூன்று பிரிவுகளாக உள்ளது.

§ 8·17. $y^2 (a + x) = x^2 (3a - x)$ என்ற வளைகோடு (Trisectrix-முப்பாகமாக்கி)



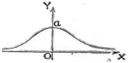
படம் 8·31

வளைகோடு x-அச்சில் சமச்சீராக உள்ளது. ஆதி ஒரு கணுப் புள்ளி, $x + a = 9$ என்பது ஒன்றே அணுகுகோடு. $0 < x < 3a$ என்ற இடைவெளியில் வளைகோட்டிற்கு ஒரு தடம் (Loop

உள்ளது. $(3a, 0)$ என்பதும் வளைகோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. $x + a = 0$ என்கிற நேர்க்கோட்டிற்கு இடப்புறமும், $x = 3a$ என்பதற்கு வலப்புறமும் வளைகோடு கிடையாது. (வரைபடம் 8·31).

§ 8·18. அக்னெஸ்ஸியின் வளைகோடு (Witch of Agenesi)

$y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ என்கிற வளைகோடு. (பழங்காலக் கணக்கறிஞர்களுள் பெண்கள் மிகச் சிலரே. அவர்களுள் அக்னெஸ்ஸியும் ஒருவர்.)



படம் 8·32

இது y-அச்சில் சமச்சீராக உள்ளது. $y = 0$ என்பது தொடுகோடு. $(0, a)$ மற்றும் $\left(a, \dfrac{a}{2}\right)$ என்பவை வளைகோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகள். $x = 0$ என்பது பெருமப்புள்ளி. வேறு பெருமம் சிறுமங்கள் கிடையாது.

$$\frac{dy}{dx} = 1/2\,\frac{(-2a^3)\,x}{(x^2 + a^2)^2}$$

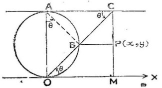
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2a^3\left[\frac{1}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{-4x^2}{(x^2 + a^2)^3}\right]$$

எனவே வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் $x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ என்பவை.

இரண்டு வளைவு மாற்றப்புள்ளிகள் 8·32 படத்திலுள்ள வளைகோட்டில் உள்ளன.

இந்த வளைகோட்டிற்குத் துணை அலகு சமன்பாடுகள் கீழ்வருமாறு:

$x = a \cot\theta,\ y = a \sin^2\theta$. இது கீழ்காணும் படத்திலுள்ளது.



படம் 8·33

வட்டத்தின் ஆரம் $= \dfrac{a}{2}$. அதற்கு x-அச்சும் $y = a$ என்ற இணைகோடும் தொடுகோடுகள். C என்பது $y = a$-ன் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. OC வட்டத்தை B-ல் வெட்டுகிறது. BP, CP என்பவை முறையே x-, y-அச்சுகளுக்கு இணைகோடுகள். C-என்பது AC-என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் நகருமானால் P-ன் நியமப்பாதை தான் இந்த வளைகோடு. $\triangle OAC$-யிலிருந்து

$OM = AC = OA.\ \cot\theta = a \cot\theta.$

மற்றும் $OC = \dfrac{a}{\sin\theta}$. $\triangle BOA$-யிலிருந்து $OB = a \sin\theta$.

எனவே $BC = OC - OB = \dfrac{a}{\sin\theta} - a \sin\theta = \dfrac{a \cos^2\theta}{\sin\theta}$

$y = CM - CP = a.\ BC \sin\theta = a - \cos^2\theta = a \sin^2\theta$. எனவே $(x - y)$-ன் நியமப்பாதை படம் 8·32-ல் உள்ளபடி.

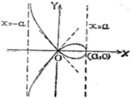
§ 8·19. $(x^2 + y^2)\,x - a\,(x^2 - y^2) = 0$ என்கிற வளைகோடு

x-அச்சில் வளைகோடு சமச்சீராக உள்ளது. ஆதி ஒரு கணுப் புள்ளி. அங்கு தொடுகோடுகள் $y = \pm x$ என்பவை.

$y = \pm x \sqrt{\dfrac{a - x}{a + x}}$ என்று வருவதால், $(a, 0)$ என்பதும்

மூலக்குறியின் அடியிலுள்ள கோவை மிகையாக வேண்டுமானால், x-என்பது $(-a, a)$ என்ற இடைவெளியில் மட்டும் இருக்க வேண்டும். எனவே இந்த இடைவெளிக்கு அப்பால் வளைகோடு இருக்காது.

$x + a = 0$ என்பது மட்டும் ஒரு அணுகுகோடு. $(a, 0)$ என்ற புள்ளியில் $x = a$ என்பது மட்டும் தொடுகோடு. இந்த விவரங்களை வைத்து வளைகோட்டை படம் 8·34-ல் உள்ளதைப் போல் வரையலாம்.



படம் 8·34

இதற்குத் துணை அலகு சமன்பாடுகள்

$$x = a\frac{(1 - t^2)}{1 + t^2}\ ;\ y = \frac{at\,(1 - t^2)}{(1 + t^2)}$$ என்று திருவலாம்.

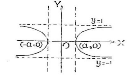
இந்த வளைகோட்டை ஸ்ட்ரோஃபாய்டு (strophoid) என்று அழைப்பார்கள்.

§ 8·20 $y^2 x^2 = x^2 - a^2$ என்ற வளைகோடு

இது இரு அச்சுகளிலும் சமச்சீராக இருக்கிறது. $(a, 0)$-ல் தொடுகோடு $x = a$; எனவே $(-a, 0)$-ல் தொடுகோடு $x = -a$, $y^2 = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2}$. ஆதலால் $(-a, a)$ என்ற இடைவெளியில் வளைகோடு இருக்காது; y-அச்சு வளைகோட்டைச் சந்திக்காது.

நாற்படி சமன்பாடான இதில், x^2-ன் கெழுக்களைப் பூச்சியமாக்க $y^2 - 1 = 0$ என்ற இரு அணுகுகோடுகள் கிடைக்கின்றன. இவை இரண்டுதான் மெய்யானவை. $x \to \infty$ என்னும் பொழுது $y \to +1 - 0$ எனவே, முதல் கால்பகுதியில் அணுகு கோட்டிற்குக்

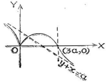
கீழே வளைகோடு இருக்கும். சமச்சீர் நிலைமையிலிருந்து மற்ற காற்பகுதிகளில் வளைகோடு அணுகு கோட்டிற்கு எவ்வாறு அமைந்துள்ளது என்று அறிய வரைபடம் 8·35 உதவும்.



படம் 8·35

§ **8.21.** $x^3 + y^3 - 3ax^2 = 0$ என்கிற வளைகோடு

வளைகோட்டிற்கு எத்தகைய சமச்சீர் நிலைமையும் கிடையாது. $(0, 0)$, மற்றும் $(3a, 0)$ என்பவை வளைகோட்டின் மேலுள்ளன.



படம் 8·36

$y + x - a = 0$ என்ற ஒரே அணுகுகோடுதான் உள்ளது.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,(2a - x)}{y^2}$$

எனவே $x < 0$ என்றால் $\frac{dy}{dx} < 0.$

$0 < x < 2a$ என்றால் $\frac{dy}{dx} > 0.$

$x = 2a$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = 0.$

$x > 2a$ என்றால் $\frac{dy}{dx} <$

அதாவது, $x < 0$, மற்றும் $x > 2a$ இடைவெளிகளில், வளைகோடு இறங்குமுகமாகவும், $0 < x < 2a$ என்ற இடைவெளியில் ஏறுமுக மாகவும் இருக்கும். $x = 2a$-ல் ஒரு பெருமம் நிகழ்கிறது.

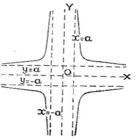
$(0, 0)$ என்பது ஒரு கூர்புள்ளி; அங்கு $x = 0$ என்பது தொடு கோடு.

$x < 0$, $y < 0$ என்ருல் $3ax^2 < 0$. எனவே, வளைகோடு கற்பனை. அதாவது, மூன்ரும் காற்பகுதியில் வளைகோட்டின் பகுதியில்லை

இரண்டாம் காற்பகுதியில் அணுகுகோட்டின் கீழும், நான்காம் காற்பகுதியில், அணுகுகோட்டின் மேலும் வளைகோடுள்ளது என்று கணக்கிடலாம்.

வளைகோடு அணுகுகோட்டை $\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. இந்த முடிவுகளை வைத்து படம் 8·36 வரையப் பட்டுள்ளது.

§ 8·22. $x^2(y^2 - a^2) = a^2 y^2$ என்றவளைகோடு



படம் 8·37

இந்த வளைகோடு இரு அச்சுகளிலும் சமச்சீராக உள்ளது. எனவே முதல் காற்பகுதியில் மட்டும் வரைபடம் வரைந்தால், பிரதிபிம்பமுறையில் (Reflection) மற்ற மூன்று காற்பகுதிகளிலும் வரைந்து விடலாம்.

$-a < y < a$ என்றால், x-கற்பனை; அதேபோல் $-a < x < a$ என்றால் y-கற்பனை. எனவே வளைகோடு $x > a$, $y > a$ என்ற பகுதியில் மட்டுமே இருக்கும்.

$x = \pm a$, $y = \pm a$ என்பவை நான்கு அணுகுகோடுகள்.

$x = 2a$ என்றால் $y = \frac{2}{\sqrt{3}} a$. இந்த விவரங்கள் கொண்ட வளைகோட்டின் படம் 8·37-ல் உள்ளது.

§ 8·23. சில பொதுவான விதிகள்

$y^2 = f(x)$ என்கிற வளைகோட்டை எடுத்துக்கொண்டால் அது y-அச்சில் சமச்சீராக உள்ளது. எந்த x-மதிப்புகளில் $f(x) < 0$ ஆகுமோ அந்த மதிப்புகளுக்கு y-கற்பனை.

முதலில் $f(x)$-க்கு $(x - x_1)$ என்ற ஒரு காரணி இருக்கிறது என்று கொள்வோம். அப்பொழுது x_1 புள்ளியின் இடப் புறத்திலோ அல்லது வலப்புறத்திலோ உள்ள வளைகோடு கற்பனை யாகி விடுகிறது. மற்றும் இந்த $(x_1, 0)$ என்கிற புள்ளியில்,

$$\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 = \frac{y^2}{(x - x_1)^2} = \frac{\phi(x)}{x - x_1} \quad \text{எனலாம்.} \quad \text{அதாவது}$$

$\frac{dy}{dx} \to \infty$; எனவே அந்தப் புள்ளியில் தொடுகோடு y-அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும்.

இப்பொழுது $f(x)$-க்கு $(x - x_1)^2$ என்கிற இருபடித்தான காரணி உள்ளது எனக் கொள்வோம். x-ன் மதிப்புகளுக்கு $(x - x_1)^2$ என்ற குறி மாறுவதில்லையாதலால் $(x_1, 0)$ புள்ளியின் இருபுறங்களிலும் வளைகோடு கற்பனையாக இருக்கும் அல்லது மெய்யானதாக இருக்கும். மெய்யானதானால், இரு தனித்தனியான கிளைகள் பிரிந்து செல்லும். அதாவது $(x_1, 0)$ என்பது ஒரு கணுப்புள்ளி. முழுவதும் கற்பனையாயின் $(x_1, 0)$ என்பது ஒரு தனியான அல்லது துணையியப்புள்ளி (conjugate point).

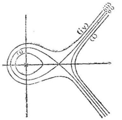
$f(x)$-க்கு $(x - x_1)^3$ என்கிற முப்படித்தான காரணியிருந் தால், $f(x) = (x - x_1)^3 \cdot F(x)$, எனவே அந்தப் புள்ளியின் ஒரு புறத்தில் வளைகோடு கற்பனையாகும். அந்த புள்ளியில் வளைகோடு x-அச்சைத்தொடும்.

§. 8·24 $ay^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ என்கிற வளைகோடு

பொதுவாக, $a > 0$, மற்றும் $\alpha < \beta < \gamma$ என்போம். அப்பொழுது $x < \alpha$, மற்றும் $\beta < x < \gamma$ என்ற இடைவெளியில் வளைகோடு இல்லை. $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$-களுக்கிடையே வளைகோட்டிற்கு ஒரு பெருமப் புள்ளியுள்ளது. எனவே இந்த இடைவெளியில் ஒரு தடம் (loop) நிகழும். மற்ற வளைகோட்டுப் பகுதி கந்தழிவரை செல்லும். (Infinite branch).

$$\text{மற்றும் } \frac{y^2}{x^2} = \frac{x}{a}\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)\left(1 - \frac{\beta}{x}\right)\left(1 - \frac{\gamma}{x}\right)$$

அதாவது $x \to \infty$ என்றால் $\frac{y}{x} \to \pm\infty$ ஆகுமாதலால் அது y-அச்சிற்குக் குத்தாக (perpendicular) அமையும்.



படம் 8·38

$$\beta = \alpha \text{ என்றால் } ay^2 = (x - \alpha)^2 (x - \gamma) \qquad \text{(ii)}$$

$x < \gamma$ என்ற இடைவெளியில் பொதுவாக y-கற்பனையானாலும் $(\alpha, 0)$ என்பது வளைகோட்டின் மேல் ஒரு புள்ளி. அது துணையியப் புள்ளியாகும்.

$$\gamma = \beta \text{ என்றால், } ay^2 = (x - a)(x - \beta)^2 \qquad \text{(iii)}$$

இப்பொழுது கந்தழித்குச் செல்லும் பகுதியும், தடமும் ஒன்றாக சேர்ந்துவிட்டிருக்கும். எனவே அவை ஒரு கணுப்புள்ளியினூடே செல்லும் கந்தழிக்கிளையாகும்.

y^2-க்கு $(x - \alpha)$ என்ற ஒரு காரணி மட்டுமிருந்தால்,
$$ay^2 = (x - \alpha)(x^2 + px + q) \qquad \text{(iv)}$$

இப்பொழுது வளைகோடு x-அச்சை ஒரே ஒரு புள்ளியில்தான் $(\alpha, 0)$ வெட்டும். இந்த நான்கு வளைகோடுகளையும் படத்தில் தனித்தனியே காணலாம்.

(x-என்கிற புள்ளி (ii)-ம் வளைகோட்டின் மேலுள்ளது.)

கடைசியாக, $\alpha = \beta = \gamma$ ஆனால் $y^2 = (x - \alpha)^3$. இது அரை முப்படி பரவளையமாகும். இதனை முன்பே வரைந்துள்ளோம்.

பயிற்சி VIII—1

I. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளைக் குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் வரைக.

(a) $y = f(x) = x^4 + 4x^3 + 14 \qquad (-4 < x < 2)$

(b) $y = f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + 4x - 1 \qquad (+2 < x < 4)$

(c) $y = 4x^2 - x^3 \qquad (-3 < x < 4)$

(d) $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta), \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

(e) $x = a(\cos\theta + \sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta), \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

II. கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளின் வரைபடம் வரைக.

1. $y = x(x-1)^3$ 2. $y = x(x-2)^3$

3. $y = x^5 - 16x^2$ 4. $y^2 = \dfrac{1}{x}$

6. $ay^2 = x^2(a - x)$ 7. $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

8. $y^2 = x(x^2 - 1)$ 9. $a^4y^2 = x^4(a^2 - x^2)$

10. $x^2(x - y) + y^2 = 0$ 11. $y^2x^2 = x^2 + 1$

12. $y^2(2x-1) = x(x-1)$ 13. $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

14. $y^2(a^2 - x^2) = x^4$ 15. $y^2 = \dfrac{x}{1 + x^2}$

16. $y^2 = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$ 17. $\dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{a - x}{x}$

18. $x = (y-1)(y-2)(y-3)$

19. $36y^2 = (x^2-1)^2(7-x^2)^3$

20. $x^3 + y^3 = a^3$ 21. $x^3 + y^3 = a^2x$

22. $x^3 - a^3 = axy$ 23. $xy^2 = (x+y)^2$

24. $x^4 + y^4 = 4xy^2$ 25. $\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{9}{y^3} = 1$

26. $x^2(x+y) - y^2 = 0$ 27. $x = at^2,\ y = 2at$

28. $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ 29. $x = \dfrac{a}{t},\ y = at$

30. $x = a\cos^3\theta,\ y = b\sin^3\theta$

31. $x = at^2,\ y = at^3$ 32. $x = \dfrac{3at}{1+t^2},\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$

33. $x = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2};\ y = \dfrac{at(1-t^2)}{1+t^2}$

34. $x = t - t^3,\ y = 1 - t^4.$

§ 8.25. போலார் வளைகோடுகள்

இரண்டாம் அத்தியாயத்தில் சில போலார் வளைகோடுகள் வரையும் முறைகளைப் பற்றி கூறியுள்ளோம். (பார்க்க § 2.3) இங்கு பொதுவான சில விதிகளைக் கூறி, பல குறிப்பிட்ட வளை கோடுகளை வரைந்து காட்டுவோம்.

குறிப்பு : r-க்கும் θ-க்கும், மிகை, குறை மதிப்புகள் எப்பொழுது நிகழும், அவைகளை எப்படிக் கண்டுபிடிப்பது என்கிற விதிகளை, ஒருமுறை படித்துவிட்டு பிறகு அடுத்த பகுதிகளுக்குச் செல்லவேண்டும்.

θ-ஐ $(-\theta)$ஆல் பிரதியிட, வளைகோடு மாறவில்லையென்றால், அது தொடக்கக் கோட்டில் (Initial line) சமச்சீராக இருக்கும்.

§ 8.26. நெஞ்சுவளை (Cardiode)

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

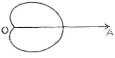
இது தொடக்கக்கோட்டில் சமச்சீராக இருந்தால், $0 \le \theta \le \pi$ என்ற இடைவெளியில் மாத்திரம் r-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்தால் போதும்.

$\theta = 0$ என்ருல் $r = 2a$

$\theta = \pi/2$,, $r = a$

$\theta = \pi$,, $r = 0$

எனவே இந்த இடைவெளியில் r-ன் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே வருகிறது.



படம் 8·39

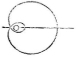
§ 8.27 $r = a\cos\theta + c$ என்கிற வளைகோடு (லிமெஸான்-Limacon)

இது நெஞ்சுவளையைவிடச் சற்று "பொதுவான" வளைகோடு இதில் $c = a$ என்ருல் நெஞ்சுவளை கிடைக்கும் ($c = 0$ என்ருல் ஒரு வட்டம் கிடைக்கும்.)

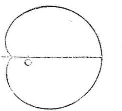
முதலில் $c < a$ என்போம். அப்பொழுது $r = 0$ என்ருல் $\cos\theta = \left(\frac{-c}{a}\right)$ அல்லது $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)$. எனவே துருவத்தை யொட்டி ஒரு தடம் அமையும். (படம் 8.40)

$c > a$ என்ருல், $r = 0$ என்று நிகழமுடியாது, எனவே படம் 8.41-ஐப் போல் அமையும்.

குறிப்பு: ஒரு வட்டத்தின் $\left(\text{ஆரம்} = \frac{a}{2}\right)$ மேல் O என்ற புள்ளியைத் துருவமாக்கி அதனூடே செல்லும் விட்டத்தைத் தொடக்கக் கோடாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது அதன் விட்டத்திலுள்ள புள்ளியில், $r = a\cos\theta$, இதே ஆரையில் O-விலிருந்து c-என்ற தூரத்தில் P', P என்ற புள்ளிகளை எடுத்துக்கொண்டால் அவைகளின் மையப்பாதைதான் மேற்கண்ட லிமெஸான் வளைகோடு.



படம் 8.40



படம் 8.41

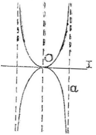
§ **8.28** $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்கிற "லெம்னிஸ்கேட்" வளைகோடு (Lemniscate).

இதனை இரண்டாம் அத்தியாயத்திலேயே வரைந்துள்ளோம். (பார்க்க படம் 2·11). இதன் கார்டீஸியன் வடிவம்

$r^4 = a^2 (r^2 \cos^2\theta - r^2 \sin^2\theta)$; அல்லது

$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ என்று அமையும்.

§ **8.29** $r = a \tan\theta$ என்கிற வளைகோடு



படம் 8 42

இதனை கப்பா (Kappa) - வளைகோடு என்று அழைப்பார்கள்.

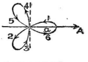
$\theta = 0$ என்பது தொடுகோடு. $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ என்ற இரண்டும் அணுகு கோடுகள்.

$\theta \to +\pi/2$ என்றால் $r \to +\infty$

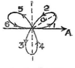
$\theta \to -\pi/2$ என்றால் $r \to \infty$

§ 8.30 பல இதழ்களைக் கொண்ட பூ வடிவங்கள்

$r = a \sin k\,\theta$ அல்லது $r = a \cos k\,\theta$ என்ற சமன்பாடுகள் பூ வடிவங்களில் அமைகின்றன என்பதை 2-ம் அத்தியாயத்திலேயே பார்த்தோம் (§ 2.3. எ. கா. 5) k என்பது ஒற்றை எண் ஆனால் k இதழ்கள்தான் இருக்கும்; k இரட்டை எண் ஆனால் $(2k)$ இதழ்கள் இருக்கும். எடுத்துக்காட்டிற்கு $r = a \cos 3\,\theta$ $r = a \sin 3\,\theta$ என்ற இரண்டு படங்களும் கீழே உள்ளன. (படம். 8.43 (a), (b).



படம். 8.43 (a)

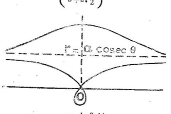


படம். 8.43(b)

§ 8.31 $r = a \operatorname{cosec} \theta + b$ என்ற வளைகோடு (Conchoid of Nicomedes)

இங்கு a, b இரண்டும் மிகை ; $b > a$

$$\left(b + a, \frac{\pi}{2}\right)$$



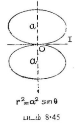
படம் 8.44

$r = a \operatorname{cosec}\theta$ என்பது அணுகு கோடு ; $\theta = \frac{\pi}{2}$ என்றால் $r = b + a$; $\theta = -\frac{\pi}{2}$ என்றால் $r = b - a$. மற்ற விவரங்களையும் கணக்கிட்டால் மேற்கண்ட வளைகோடு கிடைக்கும்.

§ 8.32 இரண்டு இதழ் பூ வடிவம் (Two-leaved Rose)

$$r^2 = a^2 \sin\theta$$

$\theta = 0$ என்றால், $r = 0$ எனவே வளைகோடு ஆதியினூடே செல்லும். $0 < \theta < \pi/2$ என்றால் r என்பது 0 விலிருந்து $\pm a$ வரை செல்லும். எனவே அம்புக்குறியுள்ள இரு பகுதிகளும் கிடைக்கும் θ என்பது $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ என்ற இடைவெளியில் இருப்பின் r ன் மதிப்பு a யிலிருந்து 0 வரை குறைந்துவரும். அப்பொழுது 1, 2 எண்களால் குறிப்பிடப்பட்ட பகுதிகளை வரையலாம்



படம் 8·45

θ ன் மதிப்பு $(\pi, 2\pi)$ இடைவெளியில் இருப்பின் r கற்பனை. ஆதலால் வளைகோடு கிடையாது. மறுபடியும் $(2\pi ; 4\pi)$ இடைவெளியில் மேற்கண்டவாறே நிகழுமாதலால் வரை கோட்டின் படம் 8.45 ஐப் போல் அமையும்.

§ 8. 33 சுருளிகள்

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளிலெல்லாம், θ-வின் திரிகோண சார்பலன்களே இடம் பெற்றிருந்தன. $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$

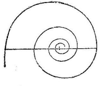
போன்றவைகளின் மதிப்புகளுக்குக் காலவட்ட ஒழுங்குடைமை (periodicity) உண்டு. எனவே ஒரே வளைகோட்டு வடிவமே மறுபடியும், மறுபடியும் வரையப்படும்.

r ன் சார்பலனில் இவ்வகை உறுப்புகள் இல்லாது மற்றவகை உறுப்புகள் இருப்பின், மேற்கண்டவாறு நிகழாது. θ-வின் மதிப்பு அதிகரித்துக் கொண்டே போனல் r-ன் மதிப்பும் மாறிக் கொண்டே வரும். θ என்பதின் மதிப்புகள் 0 துருவத்தைச் சுற்றி வருவதால், கிடைக்கும் வரைபடங்கள் சுருளிகளாக அமையும்.

முக்கியமாக மூவகைச் சுருளிகளைப் பற்றி அறிய வேண்டியது அவசியம்.

A. லாகிரிதமிக் சுருளி அல்லது மடக்கைச் சுருளி

இதன் சமன்பாட்டை $r = e^{a\theta}$ என்றோ அல்லது $\log r = a\theta$ என்றோ எழுதலாம்



படம் 8.46

$$\frac{dr}{d\theta} = ae^{a\theta} \text{ எனவே } r\frac{d\theta}{dr} = \cot\phi = \frac{e^{a\theta}}{ae^{a\theta}} = \frac{1}{a}$$

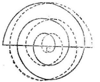
எனவே இந்த வளைகோட்டின் தொடுகோடு எப்பொழுதும் அதன் ஆரைத் திசையியோடு ஒரே மதிப்புள்ள கோணத்தை உண்டாக்குகிறது. அதனல் இந்த வளைகோட்டை 'சமகோணச் சுருளி' (Equiangular spiral) என்றும் கூறுவர். அதனைக்காட்ட இதன் சமன்பாட்டை, $r = ke^{\theta \cot \alpha}$ என்றும் எழுதலாம். அப்பொழுது $\phi = \alpha$ என்று வரும். θ என்பது $(-\infty, +\infty)$ என்ற

இடைவெளியிலிருந்தால், r ன் மதிப்புகள் 0 விலிருந்து $+\infty$ வரை செல்லும்.

B. ஆர்க்கிமிடீஸின் சுருளி

இதன் சமன்பாடு மிக எளிதான $r = a\theta$ என்ற வடிவில் அமைந்துள்ளது.

$\theta = 0$ என்றால் $r = 0$ ஆதலால் வளைகோடு துருவத்தினூடே செல்லும். θ அதிகரிக்க, அதிகரிக்க, r ன் மதிப்பும் அதிகரிக்கும்.



படம் 8·47

$\theta \to \pm\infty$ என்றால், $r \to \pm\infty$. θ என்பதன் மிகை மதிப்புகளுக்கு முழுக்கோடும், குறை மதிப்புகளுக்கு புள்ளிக்கோடும் போட்டு படம் 8.47 வரையப்பட்டுள்ளது.

C. அதிபரவளைச் சுருளி (Hyperbolic spiral)

இதன் சமன்பாடும் எளிதானதுதான். $r\theta = a$. இதனைத் தலைகீழ் சுருளி Reciprocal spiral) என்றும் கூறுவர்.

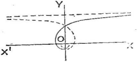
$$y = r \sin\theta \text{ என்று பொருத்த } y = a\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$\theta \to 0 \text{ என்றால், } \frac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad \text{எனவே} \quad y \to a.$$

அதாவது $y = a$ என்ற நேர்க்கோடு இந்த வளைகோட்டிற்கு அணுகு கோடாகும்.

θ மிகையாயின், r-ம் மிகை ; θ குறையாயின் r-ம் குறை; θ மதிப்பு கூடினால், r-ன் மதிப்பு குறையும். $\theta \to 0$ என்றால் வளைகோட்டின் நிலைத்தூரம் a ஐ எல்லையாகக் கொண்டிருக்கும்.

θ-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு முழுக்கோடும், குறை மதிப்புகளுக்கு புள்ளிக் கோடும் (படம் 8.48ல்) போடப்பட்டுள்ளன.



படம் 8.48

பயிற்சி VIII - II

கீழ்க்கண்ட வளைகோடுகளின் வரைபடத்தை வரைக.

1. $r^2 = a^2 \cos\theta$.
2. $r = a(\sec\theta + \cos\theta)$
3. $r^2 = \dfrac{a^2 \cos 2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$
4. $r^2 = 1/2 \tan 2\theta$
5. $r = \dfrac{3a \sin\theta \cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$
6. $r(1+\theta) = a\theta$
7. $r = \dfrac{a\theta^2}{1+\theta^2}$
8. $r \log\theta = a$
9. $r\cos\theta = a\sin 3\theta$ (போலார் வளைகோடு)
10. $r = a\log\theta$
11. $r = a(\theta - \sin\theta)$
12. $r = ae^{\theta}, \sin\theta$

குறிப்பு : சில சமன்பாடுகளைக் கார்ட்டீஸியன் வடிவில் எழுதினால் வரைவது எளிதாகும்.

BIBLIOGRAPHY

1. CHAUNDY, T. The Differential Calculus. Oxford Univasity Press, (1935).
2. COURANT, R. Differential and Integral Calculus. Vol. I & II, Blackie & Son Ltd., London (1950).
3. DIWAN AND AGASHE. Differential Equations.
4. EDWARDS, J. Differential Calculus, Macmillan & Co., London, 1922.
5. FRANKLIN, P. Compact Calculus, McGran Hill Book Co., New York, 1963.
6. GIBSON, G. A. Elementary Treatise on Calculus.
7. GIBSON, G. A. Advanced Calculus, Macmillan & Co., 1948,
8. HART, W. L. Analytical Geometry with Calculus 2nd Edn. Heath & Co., BOSTON, 1963.
9. HEDRICK, E. R. A Course in Mathematical Analysis Vol. I, Ginn and Co., 1904.
10. JOHNSON, R. E. & KIOKEMEISTER, F. L. Calculus with Analytical Geometry, Prentice-Hall, 1964.
11. LAMB, H. Infinitesimal Calculus, ELBS Series, 1962.
12. MORREY, C. B. University Calculus with Analytical Geometry. Addison Wesley Pub. Co. Inc. U.S.A. 1962.
13. NATARAJAN, & OTHERS. Differential Geometry and Differential Equations, Rochouse & Sons Ltd., Madras-1 (1970).
14. OSGOOD, W.F. Advanced Calculus, Macmillan & Co. New York, (1955).
15. PISKUNOV, N. Differential and Integral Calculus, MIR Publishers, Moscow, 1967.
16. RANDOLPH, Calculus with Analytical Geometry; Wordsworth Publishing Co., Belmant, 1964.
17. SPIEGEL, M.R. Advanced Calculus, Schaum's Series, McGraw Hill & Co. 1963.
18. SPIVAK, M. Calculus, W. A. Benjamin Inc. New York, 1967.
19. SHANTI NARAYAN. Mathematical Analysis, S. Chand & Co., Delhi.
20. THOMAS, G. B. Calculus with Analytical Geometry Addison-Wesley Pub. Co., Inc., USA 1963.
21. TORALBALLA, L. V. Calculus with Analytical Geometry, Academic Publishers, New York, 1967.

கலைச் சொற்கள்

A

Abscissa	— அச்சு தூரம்
Adjacent	— அடுத்துள்ள
Algebra	— இயற்கணிதம்
Alternate terms	— ஒன்றுவிட்ட உறுப்புகள்
Altitude	— குத்துக்கோடு
Amplitude	— வீச்சம்
Analytical Geometry	— பகுமுறை வரை கணிதம்
Angle	— கோணம்
,, arms of an	— கோணச் சிறைகள்
,, included	— உள் அமைக் கோணம்
,; interior	— உட் கோணம்
,, opposite	— எதிர் கோணம்
,, right	— செங்கோணம்
,, vertical	— உச்சிக் கோணம்
,, at the centre	— மையக் கோணம்
,, at the circumference	— பரிதிக் கோணம்
Answer	— விடை, விடைகூறு
Anticlockwise	— இடஞ்சுழியாக
Approximate	தோராயமான
,, value	— தோராய மதிப்பு
Approximation	— தோராயம்
Arbitrary	— யாதாமொரு
Arc	— வில்
Archimedian spiral	— ஆர்க்கிமீடீசின் சுருளி
Arm	— சிறை
Ascending	— ஏறுகின்ற
Asymmetrical	— சமச்சீரில்லாத
Asymptote	— தொலைதொடுகோடு, அணுகுகோடு

Axes of co-ordinates — கிடைநிலை அச்சுகள், ஆயங்கள்
,, reference — குறிப்பிட்டச்சுகள்
Axis — அச்சு, ஆயம்
,, of symmetry — சமச்சீரச்சு

B

Baseline — அடிகோடு
Bisect — இருசமக் கூறிடு
Bisection — இருசமக் கூறிடல்
Bisector — இருசம வெட்டி
Brackets — அடைப்புகள்

C

Calculate — கணக்கிடு
Calculation — கணக்கீடு, கணிப்பு
Calculus — நுண்கணிதம்
,, differential — வகைநுண்கணிதம்
,, integral — தொகைநுண்கணிதம்
Cancel — நீக்கு
Cardiode — நெஞ்சுவளை
Cartesian Coordinates — தேகாட்டின் ஆயக்கூறுகள்
கார்ட்டீசியன் ஆயக்கூறுகள்
Case — வகை
,, general — பொதுவகை
,, particular — குறிப்பிட்டவகை
,, special — சிறப்புவகை
Catenary — சங்கிலியம்
Chord — நாண்
,, of contact — தொடு நாண்
Cipher — பூச்சியம்
Circle — வட்டம்
,, osculating — கொஞ்சுவட்டம்
,, segment of a — வட்டத்துண்டு
,, semi — அரைவட்டம்
,, of curvature — வளைவுவட்டம்

21

Circum centre	—	சுற்றுமையம்
Circum circle	—	சுற்றுவட்டம்
Circumference	—	பரிதி, சுற்றளவு
Circumscribe	—	சுற்றிவரை
Coefficient	—	குணகம், கெழு
,, differential	—	வகையீட்டுக் கெழு
,, undetermined	—	தேராக் குணகம்
Coincide	—	பொருந்து, பொருத்து, ஒன்றுபடு
Concave	—	குழிவான
Concavity	—	குழிவு
Conchoid	—	சங்குரு, கான்காய்டு
Concyclic points	—	ஒரே வட்டவரையிலுள்ள
Condition	—	நிபந்தனை
Cone	—	கூம்பு
,, right circular	—	நேர்வட்டக்கூம்பு
,, surface of	—	கூம்பின் மேற்பரப்பு
Confocal	—	ஒருகுவியமுள்ள
Conic	—	கூம்புவளை
Consecutive	—	அடுத்துவருகின்ற
Constant	—	மாறா, மாறிலி
Constraint	—	கட்டுப்பாடு
Contact	—	தொடுகை
,, closest	—	மிகநெருங்கிய தொடுகை
,, point of	—	தொடுபுள்ளி
,, of curves	—	வளையித் தொடுகை, வரைகோடுகளின் தொடுகை
,, of first order	—	ஒரு படித்தான தொடுகை
,, second order	—	இரு படித்தான தொடுகை
,, of higher orders	—	அதிகபடித்தான தொடுகை
Coordinate geometry	—	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்
Coordinates	—	கூறுகள், அச்சுத்தூரங்கள் ஆயத்தொலைகள்
,, Cartesian	—	கார்ட்டீசியன் கூறுகள்
,, polar	—	போலார் கூறுகள் } கோணதூரக் கூறுகள் }
Corollary	—	துணைமுடிவு
Counter clock-wise	—	இடஞ்சுழியாக
Cube	—	கனசதுரம்
Cuboid	—	கனச் செவ்வகம்

Curvature	—	வளைவு
,, centre of	—	வளைவுமையம்
,, Circle of	—	வளைவுவட்டம்
,, radius of	—	வளைவுஆரை
Curve	—	வளைகோடு
,, Evolute of a	—	செங்கோட்டுத் தழுவி வளைவு மையப்பாதை
,, osculating	—	கொஞ்சு வளைகோடு
,, tracing of	—	வளைகோடுகளை வரைதல்
Cusp	—	கூர்
,, first species of	—	முதல்வகைக் கூர்கள்
,, of second species	—	இரண்டாம் வகைக் கூர்கள்
,, single	—	ஒற்றைக் கூர்
,, Double	—	இரட்டைக் கூர்
,, Locus of	—	கூர்புள்ளிகளின் மையப்பாதை
Cycloid	—	உருள் வளை
,, Epi-	—	புற உருள்வளை
,, Hypo-	—	அக உருள்வளை
Cylinder	—	உருளை

D

Decreasing function	—	குறையுஞ் சார்பு
Define	—	வரையறு
Definition	—	வரையறை
Dependent variable	—	சார்புடைமாறி
Derivative	—	வகைக்கெழு
Descend	—	இறங்கு
Diameter	—	விட்டம்
Differential	—	வகையீடு, வகையீட்டுக் குரிய
,, calculus	—	வகையீட்டு நுண்கணிதம்
,, coefficient	—	வகையீட்டுக் கெழு
Differentiate	—	வகையிடல், வகையிடு
Direction	—	திசை
,, of a curve at a point	—	வளைகோட்டின் ஒரு புள்ளியின் திசை
Directrix	—	இயக்குவரை

Distance	—	தூரம்
,, perpendicular	—	செங்குத்துத் தூரம்
Double points	—	இரட்டைப் புள்ளிகள்
Double roots	—	இரட்டை மூலங்கள்

E

Eliminate	—	நீக்கு, விலக்கு
Elimination	—	நீக்கல், விலக்கல்
Ellipse	—	நீள்வட்டம்
Ellipsoid	—	கன நீள்வட்டம்
End	—	முனை
Epicycloid	—	புறஉருள்வளை
Equal	—	சமம்
Equation	—	சமன்பாடு
,, differential	—	வகையீட்டுச் சமன்பாடு
,, homogeneous	—	ஒருபடித்தான சமன்பாடு
,, indeterminate	—	தேராச்சமன்பாடு
Equiangular spiral	:	சமகோணச் சுருளி
Evaluate	—	மதிப்பிடு
Evolute	—	வரை செங்கோட்டுத் தழுவி வளைவு மையப்பாதை
Exercise	—	பயிற்சி
Expand	—	விரி
Expression	—	கோவை
,, algebraical	—	இயற்கணிதக் கோவை
,, homogeneous	—	ஒருபடித்தான கோவை

F

Factor	—	காரணி
Focal chord	—	குவிய நாண்
,, distance	—	குவிய தூரம்
oci	—	குவியங்கள்
Focus	—	குவியம்
Form	—	உருவம், அமைப்பு, அமை

Formula	— வாய்பாடு
Function	— சார்பு, சார்பலன்
,, continuous	— தொடர்புடைச் சார்பு
,, dereasing	— குறைவுச் சார்பலன்
,, even	— இரட்டைச் சார்பு
,, increasing	— கூடும் சார்பலன்

G

General	— பொதுவான
Geometry	— வடிவகணிதம்
,, analytical	— பகுமுறை வடிவகணிதம்
,, differential	— வகையீட்டு வடிவகணிதம்
Gradient	— சாய்வுவிகிதம்
Gradient of a curve	— ஒரு வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதம்
Graph	— வரைபடம்
,, of a function	— ஒரு சார்பலனின் வரைபடம்

H

Height	— உயரம்
Homogeneous	— ஒருபடித்தான
Horizontal	— கிடை
,, line	— கிடைகோடு
Hyperbola	— அதிபரவளைவு
Hypocycloid	— அக உருள்வளை

I

Implicit function	— உட்படு சார்பலன்
Inclination	— சாய்வு
Increasing function	— கூடும் சார்பலன்
Independent variable	— சாராமாறி, சார்பிலாமாறி
Indeterminate	— தேரா
Infinity	— கந்தழி

Inflexion — வளைவுமாற்றம்
,, points of — வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள்
Initial — தொடக்கத்திலுள்ள
Inscribe — உள்ளேவரை
Integer — முழு எண்
Integral calculus — தொகை நுண்கணிதம்
Intercept — வெட்டுத்துண்டு
Internal point — உட்புள்ளி
Intersect — வெட்டு
Interval — இடைவெளி
Inverse points — தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்
Inversion — தன்மாற்றம்
,, circle of — தன்மாற்றுவட்டம்
,, radius of — தன்மாற்றுவட்ட ஆரை
Involute — லம்ப உரை
Isosceles triangle — இருசமபக்க முக்கோணம்
Item — உருப்பு

L

Latus-rectum — செவ்வகலம்
Law — விதி
Length — நீளம்
Limit — எல்லை
Line — கோடு
,, curved — வளைகோடு
,, straight — நேர்கோடு
,, vertical — நிலைகோடு
Linear — நேர்கோட்டுக்குரிய, ஒரு படித்தான
Locus — நியமப்பாதை
Logarithmic spiral — லாகரிதமிக் சுருளி, மடக்கைச் சுருளி
Loop — தடம்

M

Maximum — பெருமம், மீப்பெரிது
,, value — பெரும மதிப்பு

Measure — அளவு, அளவை
Method — வழி, செய்முறை
Minimum — சிறுமம், மீச்சிறிது
,, value — சிறுமமதிப்பு
Minus — குறை, எதிர்
Multiple points — மடங்குப் புள்ளிகள்
Multiplication — பெருக்கல்
Multiply — பெருக்கு

N

Negative — குறை, எதிர்
,, sign — குறைத்தற்குறி
Nodal points — கணுப்புள்ளிகள்
Nodal locus — கணு நியமப்பாதை
Node — கணு
Normal — செங்கோடு
,, to a curve — வளைவுச் செங்கோடு
Notation — குறியீட்டுமுறை
Number — எண்
Numerator — தொகுதி

O

Odd function — ஒற்றை சார்பலன்
Ordinary — பொதுவான
Ordinate — நிலைத்தூரம்
Origin — ஆதி
Orthogonal trajectory — செங்குத்து வீச்சுகோடு
Osculating curve — கொஞ்சு வளைகோடு

P

Parabola — பரவளைவு
Parallel — இணை, இணையான

Parallelogram	—	இணைகரம்
Parallelopiped	—	இணைகரத்தின் திண்மம்
Parameter	—	துணை அலகு
Parametric Equations	—	துணை அலகு சமன்பாடுகள்
Part	—	பகுதி
Particle	—	துகள்
Particular	—	குறிப்பிட்ட
Partial derivative	—	பகுதி வகைக்கெழு
Path	—	வழி, பாதை
Pedal curve	—	பாதவளைகோடு
Perimeter	—	சுற்றளவு
Perpendicular	—	செங்குத்தான
Plane	—	தளம்
Plus sign	—	கூட்டற்குறி
Point	—	புள்ளி
,, fixed	—	நிலைத்த புள்ளி
,, focal	—	குவியப்புள்ளி
,, nodal	—	கணுப்புள்ளி
,, turning	—	திரும்பற்புள்ளி
,, of inflexion	—	வளைவு மாற்றுப் புள்ளி
,, of intersection	—	வெட்டும் புள்ளி
Polar coordinates	—	துருவ ஆயத்தொலைகள் கோண தூரக் கூறுகள்: போலார் கூறுகள்
Pole	—	துருவம்
Positive	—	நேர், மிகை
Power	—	அடுக்கு
Product	—	பெருக்கம்
Property	—	பண்பு, தன்மை
Proportion	—	விகித சமம்
Proof	—	நிறுவல்
Prove	—	நிறுவு, நிரூபி

Q

Quadrant	—	கால்வட்டம், காற்பகுதி
Quadratic Equation	—	இருபடி சமன்பாடு
Quadratic Expression	—	இருபடிக் கோவை

Quadrilateral — நாற்கரம்
Quotient — ஈவு

R

Radius — ஆரை
,, of curvature — வளைவு ஆரை
,, vector — ஆரைத் திசையி
Ratio — விகிதம்
Real — மெய்யான
Reciprocal — தலை கீழான
,, spiral — தலை கீழ்ச்சுருளி
Rectangle — செவ்வகம்
Rectangular hyperbola — செவ்வக அதிபர வளைவு
Regular — ஒழுங்கான
Revolution — சுற்று
Right angle — செங்கோணம்
Right circular cone — வட்ட நேர் கூம்பு
Root — மூலம்
,, imaginary — கற்பனை மூலம்
,, real — மெய்யான மூலம்
,, coincident — பொருந்து மூலங்கள்
Rotate — சுழலுதல்
Rotation — சுழற்சி
Rule — விதி

S

Sector — ஆரைச்சிறை, வட்டக் கோணப்பகுதி
Segment — துண்டு
Semi-circle — அரை வட்டம்
Semi-cubical Parabola — அரை முப்படி பரவளைவு
Shape — உரு
Sign — குறி
Simplify — சுருக்கு
Singular Point — சிறப்புப் புள்ளி
Slant height — சாய்வுயரம்

Slope — சாய்வுவிகிதம்
Solid — திண்மம், கனஉருவம்
Solution — தீர்வு
Solve — தீர்த்தல், தீர்வுகாண்
Sphere — கோளம்
Spiral — சுருளி
,, equiangular — சமகோணச் சுருளி
,, of Archimedes — ஆர்க்கிமிடீசின் சுருளி
,, reciprocal — தலைகீழ்ச் சுருளி
Square — வர்க்கம், சதுரம்
Stationary points — நிலையான புள்ளிகள்
Straight line — நேர்கோடு
Sub-normal — செங்கோட்டடி
Sub-tangent — தொடுகோட்டடி
Substitute — பிரதியிடு
Substitution — பிரதியிடல்
Surface — மேற்பரப்பு
Symbol — குறியீடு
Symmetrical — சமச்சீரான
Symmetry — சமச்சீர்
,, axis of — சமச்சீரச்சு

T

Tangent — தொடுகோடு
Tendency — இயல்பு
Term — உறுப்பு
Test — சோதனை
Theorem — தேற்றம்
Theory — கொள்கை
Total — மொத்தம்
Trajectory — வீசுகோடு
,, Orthogonal — செங்குத்து வீசுகோடு
Trapezium — சரிவகம்
Triangle — முக்கோணம்
Triple point — முப்படிப் புள்ளி
Trochoid — சில்லுரு
Turning point — திரும்பற் புள்ளி

U

Undetermined — தேராத
,, multiplier — தோரத பெருக்கி
Unsymmetrical — சமச்சீரில்லாத

V

Value — மதிப்பு
Variable — மாறி
,, dependent — சார்புடை மாறி
,, independent — சார்பிலா மாறி
Velocity — திசைவேகம்
Verify — சரிபார்
Vertex — உச்சி
Vertical angle — உச்சிக்கோணம்
Volume — கனஅளவு

W

Whole Number — முழு எண்

X

X-axis — x-அச்சு, கிடைஅச்சு

Y

Y-axis — y-அச்சு, நிலைஅச்சு

Z

Zero — பூச்சியம்